BHS II K 3

II K

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke
Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe II K
B Nr. 3

Geometrische

Konstructionen,

oder

Anweisung,

gerade Linien und Winkel zu theilen; reguläre Figuren in und um Kreise, in und um geradlinige Figuren zu beschreiben; gleich- und ungleichseitige Dreiecke aus ihren Seiten und Winkeln, gedrückte Bogen oder sogenannte Ovale, Kegelschnitte, Spiral- und Proportionallinien, so wie kubische und biquadratische Gleichungen zu konstruiren; die Kreisperipherie ohngefähr zu rectificiren; die Kreisfläche ohngefähr zu quadriren, Tangenten an Kreise, Kreise an Kreise und gerade Linien zu legen, den Schwerpunkt der Linien, Flächen und Körper zu finden; Netze zu den platonischen und andern Körpern zu entwerfen; architektonische Glieder zu zeichnen; ebene Figuren und Körper zu verwandeln und ebene Figuren zu theilen ꝛc.

Ein Handbuch

sowohl

für Bau- und Gewerbeschulen, als auch für den Selbstunterricht, für Architekten, Bergleute, Brunnenmacher, Feldmesser, Forstmänner, Ingenieurs, Maurer, Mechaniker, Militärs, Müller, Oekonomen, Steinmetzen, Uhrmacher und Zimmerleute

bearbeitet von

J. C. G. Hampel,

Lehrer der Mathematik und Architekt ꝛc. in Breslau.

Zweite unveränderte Ausgabe.

Mit 15 Steintafeln, worauf über 700 Figuren.

Weimar, 1844.

Verlag, Druck und Lithographie von B. F. Voigt.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGW.U.SALINEN
ADMINISTR.

Non minus laudantur apes, quae ex alienis ubi libant, quam araneae, ex sese fila gignentes.

Sallust.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Obschon der große Nutzen, welchen die geometrischen Konstructionen so vielen Zweigen im Gebiete der Technik gewähren, längst von der Mehrzahl tüchtiger Sachverständiger anerkannt ist, so war man doch bis jetzt immer noch zu wenig darauf bedacht, die vorhandenen und mit Vortheil anzuwendenden Konstructionen in einem einzigen Werke zusammenzustellen und so zu ordnen, daß jede derselben leicht herausgefunden werden kann. Meistentheils sind die Lehrbücher, welche für Anfänger in der Geometrie geschrieben sind, dazu benutzt worden, einige der einfachsten Aufgaben, nebst deren Auflösungen, durch Zirkel und Lineal bekannt zu machen, und die sinnreichsten geometrischen Probleme nebst deren Auflösungen mußten wegbleiben, da der Zweck der Bücher, so wie der Raum, welcher dazu verwendet werden konnte, das Aufnehmen und Durchführen derselben nicht gestattete.

Man spielt hier und da mit den nützlichsten, vielen Geschäftskreisen unentbehrlichen Konstructionen, man verwendet sie zu untergeordneten Zwecken und läßt der Regel nach den höhern Nutzen, der durch sie erzielt werden kann, ganz außer Acht. Und wenn auch in einigen architektonischen Lehrbüchern, einige Aufgaben mittels Konstructionen zu lösen, gelehrt wird, so ist dies denn immer noch zu wenig und derjenige, welcher irgend einer Konstruction

bedarf, die nicht in diesen Lehrbüchern enthalten ist, der muß sie aus zehn und mehr Geometrien zusammensuchen und kann von Glück sagen, wenn er sie findet. Deshalb nun meinte ich, daß es nicht eine überflüssige Mühe sey, die sämmtlichen mir vorgekommenen geometrischen Konstructionen zusammen in ein Buch zu bringen und sie so zu ordnen, daß jede derselben leicht aufgefunden werden könne; wodurch das Herumirren und Suchen in den geometrischen Werken, die überdies oftmals in einer für den Sucher unverständlichen Sprache abgefaßt sind, wegfällt.

Wenige Fächer im Bereiche der mechanischen Künste und der Handwerke dürfte es wohl geben, die nicht etwas für sich in diesem Buche finden sollten. Die Instrumentalzeichner und unter diesen besonders die Maschinenzeichner werden in der zwölften Abtheilung die Aufgaben, welche die §§. 348—310 enthalten und die sich mit dem Beschreiben solcher Kreise und Linien, die einander unter gewissen Bedingungen berühren, befassen, gewiß sehr gern sehen. In der Mechanik kann man, wie Haumann in der Vorrede zu seinem „Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga" sehr richtig sagt, unter den Punkten Getriebe, unter den geraden Linien gezahnte Stangen und unter den Kreisen Stirn- oder Kammräder denken, welche, wenn sie in Bewegung gesetzt werden, an den rechten Orten in einander und an einander greifen. Das gewöhnliche Versuchen zum Bestimmen der Mittelpunkte der Räder und Triebe wird durch die Anwendung der in der gedachten Abtheilung gegebenen Konstructionen entfernt und die allen geometrischen Operationen eigene Sicherheit tritt an die Stelle des schwankenden

unsichern Versuchens oder Probirens. Ich gebe die Berührungen beinahe so, wie sie Haumann gibt, und nur bei denjenigen Konstructionen, welche aus mehrern citirten Auflösungen bestehen, habe ich das ganze Verfahren ausführlich, ohne Citate anzuwenden, beschrieben und dadurch dem Leser das lästige, ermüdende Zurückschlagen erspart: eine Weitläuftigkeit, die wohl Jeder freundlich aufnehmen wird, der nicht geneigt ist, auf Umwegen zum Ziele zu kommen. Die Beweise hierzu, so wie bei den sämmtlichen Auflösungen des ersten Abschnitts ließ ich weg, weil sie von Denjenigen, welche in ihrem Berufe dieser Auflösungen bedürfen, wohl nicht gefordert werden. Dagegen fand ich es bei dem Verwandeln und Theilen der Flächen und Körper für zweckmäßig, jeder Auflösung den Beweis beizusetzen, aus Gründen, die ich weiter unten angeben werde.

Das Einschreiben mehrerer Polygone ist streng zu beweisen und es sind daher die Anweisungen hierzu vollkommen richtig; bei den meisten Vielecken sind freilich die Konstructionen ohne geometrische Schärfe und sie wurden hier nur deshalb aufgenommen, weil sie demohngeachtet für den Praktiker von vielem Nutzen sind. Dasselbe gilt bekanntlich von dem Rectificiren der Kreislinie, so wie von den Methoden, die Kreisflächen zu quadriren.

Die Kenntnisse, welche zum Vergattern und Beschreiben gedrückter Bogen gehören, sind, und zwar mit Recht, von jedem Bauprofessionisten zu verlangen. Der Maurer bedarf dieser Bogen zur Bildung seiner Lehrbogen und der Zimmermann wendet sie bei Brücken und Kuppeln an.

Absichtlich ließ ich die in die Zimmerkunst eingreifenden Konstructionen aus diesem Buche, da nicht nur ein

eigenes Werk diesen Gegenstand behandeln wird, sondern auch weil die hier gegebenen Probleme beinahe durchgängig allgemein und nicht aus einzelnen Zweigen der Technik genommen sind und weil endlich das Projectiren der krummen Grad- und Kehlsparren, das Bestimmen der Firsten und Grade, so wie das Konstruiren der Treppenschablonen und das Bestimmen der Widerlagerstärken der Gewölbe ausschließlich dem Zimmermann und dem Maurer gehört, wozu die Konstructionen nicht selbstständige genannt werden dürfen, indem sie aus allgemeinen zusammengesetzt sind, so nahm ich diese Gegenstände hier nicht auf.

Die Kegelschnittkonstructionen dürften für die Meisten von weniger Nutzen seyn, als das Uebrige, so dieses Buch enthält. Ich vergönnte ihnen indeß darum einigen Raum, um in der eilften Abtheilung das geometrische Auflösen kubischer und biquadratischer Gleichungen mittheilen zu können.

Was das Auffinden proportionaler Linien anbetrifft, so werden die hier gegebenen, in diesen Bereich gehörenden Aufgaben gewiß jedem Geometer willkommen seyn, der sich auch erforderlichen Falls die Beweise zu den Konstructionen leicht bilden kann.

Weil nur Derjenige, welcher höhere Mathesis studirt, das Bestimmen des Schwerpunkts durch Zirkel und Lineal kennen kann und weil dieses Verfahren auch nur in den Werken, welche höhere angewandte Mathematik enthalten, zu finden ist, der Techniker aber sehr häufig bei seinen Arbeiten des Schwerpunkts bedarf, so widmete ich die dreizehnte Abtheilung diesem Gegenstande.

Die Anweisung, Netze zu Körpern zu konstruiren, konnte leicht ausgedehnter und umfassender seyn; wer indeß die

hier gegebenen Aufgaben mit Aufmerksamkeit bearbeitet hat, der ist gewiß im Stande, alle übrigen ihm vorkommenden, von mir nicht besonders erläuterten Fälle richtig behandeln zu können und daher glaube ich, daß diesem Abschnitte nicht der Fehler der Unvollständigkeit zugemuthet werden wird.

Von den architektonischen Gliedern sind nun die essentiellen, aus denen die übrigen zusammengesetzt werden können, konstruirt. Das Konstruiren der Eierstäbe, der ionischen Rollen, der Sparrenköpfe und anderer Verzierungen und Baukörper gehört nicht hierher: es sind dies Gegenstände, welche den architektonischen Lehrbüchern ausschließlich zukommen.

Das Verwandeln und Theilen der Figuren, welches der zweite Abschnitt enthält, ist so bearbeitet, daß wohl jeder im Leben vorkommende Fall in diesem Schlußtheile dieses Werkes enthalten ist. Einige Aufgaben, die nur arithmetisch am bequemsten gelöst werden konnten, durfte ich nicht weglassen und andere, die bei ihrer geometrischen Entwickelung eine solche Menge von Hilfslinien verlangen, wodurch die Figur undeutlich, gleichsam einem Spinngewebe ähnlich wird, nahm ich nicht auf, weil überdies ihre Auflösungen aus Konstructionen zusammengesetzt sind, die hier vorkommen und deren Zusammenstellung keine Schwierigkeiten macht.

Der Anhang enthält außer drei planimetrischen Aufgaben noch an dreißig Konstructionen, welche die Kegelschnitte betreffen und daher Manchem willkommen seyn dürften. Ich stellte diese Operationen absichtlich an den Schluß des Werks, da sie wohl nur ein kleineres Publikum, als

ihre Schwestern haben werden, obschon sie auch von ansehnlichem Einfluß im Gebiete der Technik sind.

Was nun die Quellen anbelangt, aus denen ich geschöpft habe, so muß ich zuvörderst des jetzt ziemlich selten gewordenen Prachtwerks des Burkhard v. Bukenstein erwähnen, welches 1686 unter dem Titel: „Erzherzogliche Handgriffe des Zirkels und Linials ꝛc." zu Wien erschien. Ferner benutzte ich Wolff, Penther, Boch, Grüson, Ozanam und Andere. Des würdigen Haumann, von dem ich die Berührungen entlehnte, habe ich bereits oben erwähnt. Der vollständige Titel seines Buchs ist: „Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Appollonius von Perga von den Berührungen ꝛc. Breslau 1817, bei H. A. Holäufer." Wenig ist diese gründliche Schrift bekannt, die schon allein ihren Verfasser als einen trefflichen Mathematiker bezeichnet. Durch sie sind uns an sechszig Sätze gegeben, die besonders den Mechanikern unentbehrlich sind. Ich durfte wohl eigentlich nur dieses Buch citiren und daher hier die Berührungen auslassen; da ich jedoch auch diejenigen im Auge haben mußte, die nicht Kraft und Zeit haben, die Auflösungen durch das Studium eines streng wissenschaftlich verfaßten Werks, wie das Humann'sche, sich anzueignen, so unternahm ich es, diese Konstructionen so zu bearbeiten, daß jede Aufgabe, ohne eine andere früher beschriebene Auflösung zu studiren, gelöst werden kann. Auf allgemein bekannte und einfache Konstructionen früherer Abtheilungen habe ich mich wohl auch hin und wieder bezogen; indeß dies kommt nicht oft vor, und wo es geschehen, da wurde es nur deshalb vorgenommen, um die

Figuren nicht durch allzuviel Hilfslinien undeutlich zu machen.

Was das Verwandeln der Körper anbelangt, so mag dasselbe nur als Andeutung dessen gelten, was in diesem Theile der Stereometrie noch vorgenommen werden könnte; wodurch unter allen Umständen sehr instruktive Fälle vorkommen werden, welche den angehenden Geometern nicht wenig nützlich seyn dürften, indem besonders die stereometrischen Beweise zusammengesetzter als die planimetrischen sind.

Dem zweiten Abschnitte habe ich deshalb die Beweise beigesetzt, weil die darin vorkommenden Aufgaben, die Verwandlung und Theilung der Figuren betreffend, doch wohl nur von solchen Geometern benutzt werden, die der Beweise unbedingt bedürfen. Der Feldmesser verlangt die Beweise dieser Probleme nicht zur Ausübung seines Fachs, sondern lediglich zu seiner Prüfung, bei welcher bekanntlich von allen geometrischen Arbeiten, welche der Examinand abzugeben hat, die Beweise geführt werden müssen.

Eben so ist es bei den Militärs, denen das beim Feldmessen Vorkommende demonstrirt seyn muß.

Die Schlüsse bei den Beweisen habe ich durchgehends numerirt, da diese von dem zu früh den Wissenschaften durch den Tod entrissenen Professor Wiechota, meines Wissens zuerst angenommene Einrichtung das Citiren und Substituiren ungemein erleichtert. Freilich wird dadurch der Vortrag monoton, er verliert an Feuer und Leben; was thut dies aber, wenn er dagegen deutlicher und verständlicher wird? Der Mathematiker darf wohl entschuldigt werden, wenn er kein excellirender Redner ist! —

Das weite Feld der Geometrie, auf dem unsere Elementargeometrie nur ein sehr dürftiger Wegweiser ist, wird uns mit seinen Schätzen nach und nach bekannter werden, wenn wir nach Art der Alten mehr das Konstruiren der Probleme pflegen und öfter den geometrischen als den rechnenden Weg einschlagen. — Und sollte uns dabei auch nur die Ueberzeugung lohnen, daß wir an Scharfsinn gewinnen, so wäre dies schon ein triftiger Grund, für das geometrische Verfahren zu stimmen. Am besten können wir den Nutzen, welchen das geometrische Analysiren erzeugt, wahrnehmen, wenn wir auf den Einfluß Achtung geben, welchen polytechnische Bau- und Gewerbeschulen auf die Kultur der Techniker ausüben, was diesen Anstalten doch nur deshalb möglich wird, da auf ihnen die Geometrie nebst deren Tochter: die Konstructionslehre, und die beschreibende Geometrie oder das Projectiren zum Grunde gelegt wird. Den bedeutenden Nutzen, welchen die geometrische Auflösung der Probleme über alle Theile der Mathesis verbreitet, hat einer der größten Geometer, nämlich Newton, dadurch bezeichnet, daß er es eingestanden, wie sehr es ihm gereut habe, Aufgaben, die er algebraisch aufgelöst hatte, nicht geometrisch gelöst zu haben.

Da man nun alle Sätze der Geometrie algebraisch, nämlich arithmetisch, darstellen kann, so müssen umgekehrt auch alle Sätze der Arithmetik geometrisch konstruirt werden können. So richtig nun auch dieser Schluß ist, eben so wenig haben wir Kraft, alle Formeln geometrisch darzustellen, was wohl nicht der Fall wäre, wenn das Studium der Geometrie strenger, als es jetzt geschieht, gepflegt und erweitert würde.

Immer noch zu wenig wird Euklid, der Vater der Geometrie, durchgearbeitet. Denn die auf den Schulen oder privatim durchgenommenen ersten sechs oder acht Bücher dieses Alt- und Obermeisters der Größen reichen nicht aus, um als Führer auf dem unbegrenzten Felde der Geometrie zu gelten, mit welchem man sicher wandeln könnte. Wenige nur dringen in das Euklidsche Wesen ein, und nur Wenigen gelingt es, dasjenige, so sie durch ihr Eindringen in das Land der Wahrheit gewonnen, allgemein zu machen und zum Nutzen Vieler zu verbreiten.

Wie viel Hilfe, welches Hilfsmittel, welche Vortheile müßten nicht dem gemeinen Leben, so wie den Gewerben erwachsen, wenn man bemüht wäre, mehr und mehr fortzuschreiten in dem Gebiete der Geometrie, wenn man mehr und mehr Sätze aufsuchte und sie für die Praxis anwendbar machte? In welchem Maße die Architekten, die Feldmesser, die Forstmänner, die Militärs, die Mechaniker und die Bauprofessionisten der geometrischen Hilfsmittel bedürfen, ist bekannt, aber eben so bekannt ist es, daß noch gar wenig Techniker auch nur einige dieser Hilfsmittel kennen, und am Ende die wenigen geometrischen Kunstgriffe, deren sie sich mit Vortheil bedienen, wohl gar als Geheimnisse geheim halten und sich bei Anwendung derselben vor Jedermann verschließen. Obschon dies ein schlimmes Zeichen, ein stummer Zeuge der noch immer vorherrschenden Ignoranz ist, die bekanntlich der Regel nach mit Geheimnißkram im Bunde steht, so mag es andererseits der Sporn seyn, der uns anregt, mit allen Kräften gegen dergleichen Unwesen thätig zu seyn. —

Ob nun die hier vorgelegten Aufgaben und deren Auflösungen in Etwas beitragen werden, Licht zu verbreiten und Nutzen zu erzeugen, hier und da den Geheimnißkram zu verdrängen und Liebe zum eifrigen Studium der Geometrie zu erwecken, möge die Folge recht bald nach meinem Wunsch entscheiden, der auch noch dafür ist, daß alle vorhandene Lücken in denjenigen Geschäftskreisen, welche der Mathesis bedürfen, bald entfernt werden mögen.

Die Sammlung der hier vorgelegten Aufgaben wird, so weit ich mich anderswo umgesehen habe, wohl zu den vollständigsten gezählt werden, die bis jetzt erschienen sind. Es ist dies kein Selbstempfehlen meines Werks, sondern nur eine schuldige Erklärung, die ich bei seinem Auftreten unter das größere Publikum geben muß. Ich glaube mich dem bei dieser Arbeit vorgesteckten Ziele ziemlich genähert zu haben: das Erreichen desselben, das Hingelangen zum Gipfel der Vollendung aber, das mag dem Willen und den Kräften anderer Geometer vorbehalten seyn. —

Was nun endlich die in diesem Buche herrschende Sprache betrifft, so ist sie ohne allen rhetorischen Prunk, indem ich lediglich die Deutlichkeit als Hauptsache zum Grunde legte und daher auch so ungezwungen sprach, wie man zu den Meisten, für die dieses Werk bestimmt ist, sprechen muß. Vieljährige Erfahrungen haben mich es gelehrt, daß keine Sprachdekorationen vorkommen dürfen, und daß der hohe Kathederstyl wegfallen muß, wenn man nämlich Technikern verständlich werden will. Denn wer Gelegenheit hatte, die Mehrzahl unserer Professionisten, und zwar beim Unterrichten kennen zu lernen, der wird mir ohne Weiteres beistimmen, daß selbst die einfachste,

die deutlichste, die kürzeste, die so ganz für das Fassungsvermögen des Schülers gebildete Erklärung der Regel nach unverstanden, folglich ohne Nutzen bleibt; aus Gründen, die in dem Mangel hinlänglicher Schulkenntnisse dieser Subjecte zu suchen sind. Es hätte daher auch für diese Männer jeder Aufgabe eine Anwendung, aus dem Leben entnommen, beigesetzt werden mögen. So sehr ich dies einsehe und so vortheilhaft dies für Viele gewesen wäre, so mußte ich es doch unterlassen, weil sonst das Buch wohl noch einmal so stark und dadurch der Ankauf desselben erschwert worden wäre. Auch müßte der nothwendig höher gestellte Preis der nothwendigen Verbreitung dieses Werks entgegen wirken. Wer diese Schrift benutzt und ein wenig nachdenken will, wird ohnehin, hat er die Aufgaben verstanden, auch im Leben am rechten Ort Anwendung davon machen können. Wer fleißig konstruirt, wird sich eine Fertigkeit hierin aneignen, die zu sinnreichen, meistentheils einfachen Verfahrungsarten oder auch zu ganz neuen nützlichen Konstructionen führt: auch werden sich beim häufigen Gebrauche der Instrumente verschiedene Handgriffe der Hand und dem Auge gleichsam aufdrängen.

Jeder Architektur- und Maschinenzeichner, der mit sämmtlichen Aufgaben, die für sein Fach gehören, wohl bekannt ist, arbeitet richtiger, folglich auch schneller und akkurater als ein Anderer, dem diese Hilfsmittel nicht zu Gebote stehen, der da versuchen muß, wo jener mit Sicherheit zu Werke geht. Dies allein ist schon hinreichend, das Thätigseyn im Gebiete der Geometrie Jedem, der ihrer bedarf, ernstlich zu empfehlen.

Hoffentlich werde ich in den Lehrern an den Bau- und Gewerbeschulen keine Antagonisten meiner auf vieljährige Erfahrungen gegründeten Ansichten finden und in diesem Falle habe ich die Stimme der Kompetenz für mich, was so viel ist, als ich nur verlangen kann.

Gern werde ich die etwa berichtigenden Fingerzeige beherzigen, leere Kritteleien aber unter allen Umständen ignoriren.

Einige neue Konstructionen, die mein Eigenthum sind, wird der Sachkenner wohl bald finden; ich meinte nicht unrecht zu handeln, als ich diese Neulinge in mein Buch aufnahm.

J. C. G. Hampel.

Inhalt.

Seite

Vorrede . . . . . III—XIV

Erster Abschnitt.

Erste Abtheilung.

Theilung gerader Linien und ebener Winkel; Konstruction der Perpendikel und Tangenten. §. 1 bis §. 57 . 1—27

Zweite Abtheilung.

Konstruction regulärer Figuren in den Kreis; oder Anweisung, die Peripherie in gleiche Theile zu theilen. §. 58 bis §. 76 . . . . . 28—36

Dritte Abtheilung.

Konstruction geradliniger Figuren um und in den Kreis; ferner geradliniger Figuren um und in geradlinige Figuren. §. 77 bis §. 99 . . . . . 37—45

Vierte Abtheilung.

Konstruction gleichseitiger und ungleichseitiger Dreiecke aus ihren Seiten, so wie der regulären Vielecke aus einer ihrer Seiten. §. 100 bis §. 122 . . . 45—56

Fünfte Abtheilung.

Konstruction der gedrückten Kreise oder der sogenannten Ovale durch Kreisbogen, durch Vergatterung und durch andere Hilfsmittel. §. 123 bis §. 158 . . . 56—75

Sechste Abtheilung.

Konstruction der durch die Kegelschnitte entstehenden und anderer krummen Linien, so wie das Konstruiren der Tangenten bei den Ellipsen. §. 159 bis §. 174 . 76—83

Siebente Abtheilung.

Konstruction der sogenannten Schneckenlinien. §. 175 bis §. 187 . . . . . 83—91

Achte Abtheilung.

Methoden, die Peripherie des Kreises ohngefähr zu rectificiren und den Kreis ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln. §. 188 bis §. 198 . . . . 91—98

Seite

Neunte Abtheilung.
Konstruction der Proportionallinien. §. 199 bis §. 224 98—109

Zehnte Abtheilung.
Konstruction der Dreiecke aus ihren Seiten und Winkeln. §. 225 bis §. 243 . . . . . 110—117

Eilfte Abtheilung.
Verschiedene Konstructionen, die theils als Hilfe bei andern Konstructionen, theils zu sonstigem Behufe verwendet werden können. §. 244 bis §. 347 . . 117—163

Zwölfte Abtheilung.
Konstruction gerader Linien und Kreise, welche Kreise und gerade Linien berühren; oder von den Berührungen. §. 348 bis §. 410 . . . . . 163—194

Dreizehnte Abtheilung.
Bestimmung des Schwerpunkts durch Konstruction.
a. Schwerpunkt der Linien. §. 411 bis §. 427 . 194—200
b. Schwerpunkt der ebenen Flächen. §. 428 bis §. 447 200—207
c. Schwerpunkt der Körper. §. 448 bis §. 457 . 207—210

Vierzehnte Abtheilung.
Zeichnung der platonischen Körper. §. 458 bis §. 463 210—212

Fünfzehnte Abtheilung.
Konstruction architektonischer Glieder. §. 464 bis §. 479 212—219

Sechszehnte Abtheilung.
Konstruction der Netze zu Anfertigung regulärer und irregulärer Körper. §. 480 bis §. 517 . . . 219—234

Zweiter Abschnitt.

Erste Abtheilung.
Verwandlung ebener Figuren. §. 518 bis §. 581 . 235—284

Zweite Abtheilung.
Einiges über die Verwandlung der Körper. §. 582 bis §. 615 . . . . . 284—305

Dritte Abtheilung.
Theilung ebener Figuren. §. 616 bis §. 713 . . 305—403

Anhang.
714 bis §. 717 . . . . . 404—428

Erster Abschnitt.

Erste Abtheilung.

Theilung gerader Linien und ebner Winkel; Konstruction der Perpendikel und Tangenten ꝛc.

§. 1.

Das Auflösen geometrischer Probleme mittels Zirkel und Lineal, nämlich durch das Ziehen gerader und krummer Linien, heißt *konstruiren*.

Bei diesem Geschäfte darf keine Ungewißheit, keine Unsicherheit, überhaupt kein Versuchen vorkommen. Alles geschieht hier nach beweisbaren, feststehenden Gesetzen mit der größten Zuverlässigkeit; und es ist daher die Konstructionslehre eben so anziehend, als nützlich.

Die Sicherheit, mit welcher so manche, selbst sehr verwickelte Aufgaben auf einfachen Wegen mit Zeitersparung gelöst werden, macht die Konstructionen besonders den Instrumentalzeichnern unentbehrlich, obgleich sie deren Regeln auch nicht blindlings überall anwenden müssen, um irgend ein verlangtes Resultat zu finden. Der Zeichner würde sehr unrecht handeln, wenn er, um z. B. eine gerade Linie zu theilen, sich der Auflösung der ersten Aufgabe §. 2 bedienen wollte; er thut in diesem Fall allemal besser, mit dem Zirkel in der Hand so lange zu versuchen, bis die Theilung vollzogen werden kann. Eben so würde man keinen Vortheil haben, wenn man die Quadratwurzel auf geometrischem Wege finden wollte; obschon dadurch die Wurzel aus *jeder* stetigen Größe erhalten wird. Hier steht die Rechnung höher, als die Konstruction, oder sie ist ihr vorzuziehen.

Sollen aber zu architektonischen oder Maschinenzeichnungen gehörige Aufgaben gelöst werden, so dürfte der Kalkül zurücktreten müssen; und wenn wir übrigens die Ausübung, die sogenannte Praxis in Anspruch nehmen, so ist bei ihr wohl in den meisten Fällen die Konstruction jedem andern Verfahren vorzuziehen.

Das Aufzeichnen der Leerbogen, das Entwerfen der Schablonen zu den Treppen und krummen Graden und Kehlsparren, das Abstecken regulärer und irregulärer Figuren, das Schiften, das Projectiren oder Austragen krummer Grade und Kehlen, so wie noch vieles andere in dem so großen Gebiete der Technik, wird am leichtesten, am natürlichsten und sichersten durch demonstrative Konstruction verrichtet: denn jede Berechnung, und wenn sie noch so richtig und deren Ergebniß rational ist, würde hier mindestens durch Zeitverlust strafen; was denn doch wohl ein Gegenstand bleibt, der, wenn es nur irgend möglich ist, vermieden werden muß.

§. 2.

Aufgabe.

Jede begrenzte gerade Linie **ab** (Fig. 1.) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Erste Auflösung.

An den einen Endpunkt **a** der Linie **ab** lege man unter einem beliebig großen Winkel *) eine Linie **ac**, nehme die willkürliche Weite **ae** in den Zirkel und trage diese von **a** gegen **c** so viel mal, als in wieviel Theile die Linie **ab** getheilt werden soll, hier z. B. etwa sechsmal. Jetzt beschreibe man mit einem ebenfalls beliebigen Halbmesser **au** aus **u** den Bogen **uv** und dann aus **b** den Bogen **wx**, mache **wx = uv** und ziehe durch **b** und **x** die **bd**. Trägt man nun die Theile **ae**, **eg**, **gi**, **il**, **ln** und **nc** sechsmal von **b** gegen **d** zu, und zieht man **ef**, **gh**, **ik**, **lm** und **no**, so ist **ab** in den Durchschnittspunkten **p**, **q**, **r**, **s** und **t** nach Verlangen getheilt.

---

*) Am besten ist es, wenn man den Winkel **bac** nicht viel größer oder kleiner, als 45°, überhaupt so annimmt, daß die Linien **ad**, **ef**, **gh** ꝛc. möglichst lothrecht auf **ab** zu stehen kommen, indem dann die Durchschnittspunkte **p**, **q**, **r**, **s**, **t** ꝛc. am bestimmtesten sind.

Auf dem Felde würde man bei a und b Pflöcke oder Stäbe einschlagen, die Bogen u v und w x aber durch eine um diese Stäbe gewundene Schnur beschreiben; oder man würde, wenn diese Konstruction z. B. auf einem gedielten Fußboden sollte vorgenommen werden, in a und b Nägel einschlagen und darum die Schnur legen, mit welcher sodann die gedachten Bogen beschrieben werden könnten.

Hat man zwei rechtwinklige Triangel **A** und **B** (Figur 2.), so ziehe man zuvörderst **a c**, trage darauf die beliebig großen, aber gleichen Theile **a f**, **d f** und **c d**, wenn **a b** in z. B. drei gleiche Theile getheilt werden soll. Jetzt lege man die eine Kathete **h i** des Triangels **A** an **b c** und an die Hypothenuse **h k** desselben Triangels lege man ein anderes Dreieck **B** dergestalt, daß **l m** in **h k** fällt. Hält man nun **B** fest, so können, wenn **A** gegen **m** zu fortgeschoben wird, an der Kante **h i** die Linien **d e** und **f g** gezogen werden, welche mit **h i** parallel gehen und die **a b** in den Punkten **g** und **e** nach Verlangen theilen kann.

Zweite Auflösung.

Man nehme eine beliebig große Linie **k l** (Fig. 3.) und trage auf sie so viel gleiche Theile **k m**, **m n**, **n o** ꝛc., als in wie viel Theile die **a b** getheilt werden soll. Nun beschreibe man aus **a** und **b** mit **a b** Bogen, welche sich in **c** schneiden und ziehe die Linien **a c** und **b c**. Trägt man endlich die **k o** von **c** nach **e** und von **c** nach **d**, so ist auch **d e** = **k o**; und zieht man durch **f** und **g**, welche Punkte den Punkten **m** und **n** auf **k o** entsprechen, die **c h** und **c i**, so ist die **a b** bei **h** und **i** in die verlangten (hier drei) gleichen Theile getheilt; es ist sodann:

$$\mathbf{a\,h} = \mathbf{h\,i} = \mathbf{b\,i} = \tfrac{1}{3}\,\mathbf{a\,b}.$$

§. 3.

Aufgabe.

Jede begrenzte grade Linie **a b** (Fig. 4.) in (z. B. drei) solche Theile zu theilen, welche unter sich ein bestimmtes Verhältniß (z. B. wie 5 : 3 : 7) haben.

Auflösung.

Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen, merke die Summe und theile die gegebene Linie **a b** in so viele gleiche Theile (§. 1.), als wie viel Einheiten diese Summe enthält: hier also in 5 + 3 + 7, das ist in 15 gleiche

Theile. Nun nehme man von a an so viel Theile, als wie viel Einheiten die erste Verhältnißzahl hat; man zähle nämlich von a bis c fünf Theile ab und da die andere Verhältnißzahl drei ist, so müssen von c gegen d zu drei Theile genommen werden. Der hier bleibende Rest b d hat dann sieben Theile, welche für die dritte Verhältnißzahl kommen, und es ist nun

$$ac : cd : db = 5 : 3 : 7.$$

Sollten die gegebenen Verhältnißzahlen entweder Brüche seyn oder aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehen, so müssen die Bruchverhältnisse durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, mit denen man so verfährt, wie eben gelehrt wurde.

Sollen z. B. die Theile der gegebenen Linie sich wie

$$\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 8\frac{5}{6}$$

verhalten, so richte man zuvörderst die vermischten Zahlen ein und es wird

$$\frac{1}{2} : \frac{8}{3} : \frac{4}{5} : \frac{53}{6}$$

erhalten. Nun nehme man den diesen Brüchen gemeinschaftlichen Nenner 30 und multiplicire einen jeden Bruch damit, wodurch man

$$15 : 80 : 24 : 265$$

erhält, welche Zahlen ganz in demselben Verhältnisse, wie die gegebenen Brüche zu einander stehen und mit denen man, so wie gelehrt wurde, verfährt.

§. 4.

Aufgabe.

Jede gerade Linie a b (Fig. 5.) mit einer Zirkelöffnung, welche so groß, wie die gegebene Linie selbst ist, in drei gleiche Theile zu theilen.

Erste Auflösung.

Man nehme die Linie a b in den Zirkel und beschreibe damit aus a und b Kreise, welche sich in d schneiden. Aus d schlage man mit der unverändert gelassenen Zirkelöffnung den Bogen e a b f, wodurch die Punkte e und f markirt werden. Nun ziehe man a d, b d, b e und a f; dadurch erhält man die Punkte g und h, welche, wenn man sie mit c verbindet, wenn man nämlich die c g und c h zieht, die Punkte i und k auf a b bestimmen; wo-

durch die gegebene Linie **a b** in drei gleiche Theile getheilt ist.

Andere Auflösung.

Mit **a b** (Fig. 6.) beschreibe man aus **a** und **b**, dann aus dem Durchschnittspunkte **d** Kreise, wodurch die Punkte **g** und **h** bestimmt werden, aus denen man mit unveränderter Zirkelöffnung die Bogen **d k** und **d i** schlägt. Verbindet man nun **k** und **i** mit **c**, das heißt zieht man **c k** und **c i**, so wird **a b** bei **l** und **m** dergestalt getheilt, daß

$$\mathbf{a\,l = l\,m = b\,m = \tfrac{1}{3}\,a\,b}$$

ist.

§. 5.

Aufgabe.

Einen geradlinigen ebenen Winkel **a b c** (Fig. 7.) an eine gerade Linie **e f** dergestalt zu tragen, daß der Scheitel **b** in einen in der Linie **e f** liegenden Punkt **d** kommt.

Auflösung.

Auf **b c** nehme man **h** willkürlich und schlage mit **b h** den Bogen **g h**. Ebenfalls beschreibe man mit **b h** aus **d** den Bogen **l k** und mache **i k = g h**. Zieht man nun **d i**, so ist

$$\mathbf{i\,d\,k = a\,b\,c.}$$

§. 6.

Aufgabe.

Eine gerade Linie zu halbiren.

Auflösung.

Man nehme auf der gegebenen Linie **a b** (Fig. 8.) einen Punkt **c** willkürlich an, wodurch die Linie in zwei ungleiche Theile **a c** und **b c** getheilt wird (wenn nicht etwa der Zufall oder das Augenmaas den Punkt **c** in den Mittelpunkt der Linie **a b** gesetzt hat), fasse den größern Theil **a c** mit dem Zirkel und beschreibe damit aus **a** und **b** die Bogen **d e** und **f g**, welche sich in **h** und **i** schneiden. Verbindet man nun die Durchschnittspunkte **h** und **i** durch eine gerade Linie **h i**, so ist der Punkt **k**, in welchem diese Linie die **a b** schneidet, genau das Mittel von **a b**.

Die Linie **i k**, welche die **a b** in **k** halbirt, steht aber auch lothrecht auf **a b** und es ist daher hier die Aufgabe:

eine begrenzte gerade Linie zu halbiren und in deren Mittelpunkt einen Perpendikel zu errichten

gelöst.

§. 7.

Im Fall aber die gegebene Linie **a b** (Fig. 9.) so groß ist, daß man sie nicht in den Zirkel nehmen kann, so schneide man von beiden Enden der Linie gleich große Stücke **a c** und **d b** ab, wodurch man die kürzere Linie **c d** erhält. Sollte diese Linie indeß noch zu groß seyn, so nehme man abermals zwei gleiche Stücke **c e** und **d f** davon ab, wodurch eine Linie **e f** übrig bleibt, die kurz genug ist, um in den Zirkel genommen zu werden und bei welcher man nach §. 6. die Bogen mit **e f** aus **e** und **f** schlägt, die Durchschnittspunkte **g** und **h** verbindet und den Mittelpunkt **i** bestimmt.

§. 8.

Aufgabe.

Zwei Punkte **a** und **b** (Fig. 10.), die weiter von einander entfernt sind, als das Lineal **f** lang ist, durch eine gerade Linie **a b** zu verbinden.

Erste Auflösung.

Man ziehe von **a** in beliebiger Richtung und Länge die **a c** und eben so die **b c** von **b**. Nun beschreibe man aus **b** mit **b c** und aus **a** mit **a c** zwei Bogen, die sich in **d** schneiden, halbire die Verbindungslinie **c d** in dem Punkte **e** und ziehe mit dem Lineal **f** die **a e** und **b e**; es bilden dann beide Linien die gerade Linie **a b**.

Zweite Auflösung.

Mit willkürlich genommener, aber unverändert gelassener Weite beschreibe man aus den gegebenen Punkten **a** und **b** (Fig. 11.) zwei Bogen, welche sich in **c** und **d** schneiden. Aus **c** und **d** beschreibe man ebenfalls mit beliebiger Zirkelöffnung zwei Bogen, die sich in **e** und **f** schneiden. Nun verbinde man **a** mit **e**, dann **b** mit **f** und wiederhole dieses Verfahren, im Fall **e f** noch zu weit seyn sollte, um mit dem vorhandenen Lineal erreicht werden zu können.

§. 9.

Aufgabe.

Eine gerade Linie mit einem sehr kurzen Lineal bis an einen weit abliegenden, bestimmten Punkt k zu verlängern.

Auflösung.

Will man die Linie a b (Fig. 12.) bis k verlängern, so beschreibe man aus irgend einem in a b liegenden Punkte, etwa aus m, einen beliebig großen Bogen c e d, der jedoch so gewählt werden muß, daß er noch innerhalb a b bleibt und diese Linie in e schneidet.

Nun nehme man den Punkt c willkürlich an und mache c e = d e; aus c und d aber beschreibe man zwei gleich große Bogen mit beliebig großem Radius und verbinde deren Durchschnittspunkt i mit b. Hierdurch ist die Linie a b bis i verlängert worden. Dies Verfahren setze man nun so lange fort, bis die Linie lang genug geworden ist.

Es wird nämlich ein Bogen h f g aus einem in a i liegenden Centrum geschlagen, h f = f g gemacht, aus h und g werden zwei sich in k schneidende Bogen beschrieben, deren Halbmesser einander gleich sind; verbindet man nun f mit k, so ist die Linie a b bis k verlängert.

Andere Auflösung.

Man ziehe a c (Fig. 13.) in beliebiger Lage und Länge, beschreibe damit aus a den Bogen c e, verlängere a b bis d, ziehe c d, beschreibe damit aus d einen Bogen, welcher den erstern in e schneidet; dann schlage man mit c e aus c und e zwei Bogen, die sich in f schneiden und ziehe d f: es ist sodann die a f die verlängerte Linie.

§. 10.

Aufgabe.

Einen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Auflösung.

Auf einem der Schenkel, z. B. auf a b (Fig. 14.) nehme man den Punkt d beliebig und mache b e = b d, setze in d ein und beschreibe mit d e, oder mit irgend einem Halbmesser, der jedoch größer als die Hälfte von d e seyn muß, den Bogen e f und mit derselben Zirkelöffnung

beschreibe man aus e den Bogen d f. Wird nun der Durchschnittspunkt f mit dem Scheitel b verbunden, d. h. wird b f gezogen, so ist

$$a\,b\,f = c\,b\,f = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,c.$$

§. 11.

Aufgabe.

Einen Kreisbogen zu halbiren.

Auflösung.

Man ziehe die Sehne a b (Fig. 16.), nehme sie in den Zirkel, beschreibe damit zwei Bogen, die sich in c und d schneiden und verbinde diese Punkte durch die gerade Linie c d: es ist dann e der Halbirungspunkt des Bogens a b.

§. 12.

Aufgabe.

Einen Winkel zu halbiren, dessen Schenkel Kreisbogen sind.

Auflösung.

Auf dem einen beliebig gewählten Schenkel a b (Figur 15.) nehme man die Punkte d und g willkürlich an und beschreibe aus b mit b g und b d, nachdem diese Linien gezogen worden, die Bogen g h und d e; halbire sie in i und f nach §. 11, beschreibe mit willkürlicher unveränderter gelassener Zirkelöffnung aus b, i und f Kreise, welche die Durchschnittspunkte l, m, n und o geben; durch diese ziehe man die geraden Linien l p und m p, welche sich in p schneiden.

Hier nun ist das Centrum, aus welchem mit b p der Bogen b i f konstruirt wird, welcher den gegebenen Winkel halbirt.

§. 13.

Aufgabe.

Aus einem in einer geraden Linie a b (Figur 17.) liegenden Punkte c einen Perpendikel zu errichten.

Erste Auflösung.

Neben c nehme man in der Linie a b irgend einen Punkt d an und mache c e = c d; aus d und e beschreibe man mit d e ein paar Bogen, welche sich in f

und g schneiden. Verbindet man nun f mit g, so ist cf lothrecht auf ab.

Zweite Auflösung.

Von dem Punkte c (Fig. 24.) setze man bis d fünf willkürlich große, aber gleiche Theile und beschreibe aus c mit ce, das ist mit vier solchen Theilen einen Kreis. Nun nehme man alle fünf Theile in den Zirkel und konstruire aus h, nämlich aus dem dritten Theilpunkt einen Bogen, welcher den zuvor beschriebenen Kreis in f und g schneidet.

Verbindet man endlich f mit g durch eine gerade Linie fg, so ist diese in c auf ab lothrecht.

Dritte Auflösung.

Auf ab (Fig. 25.) nehme man den Punkt c beliebig und beschreibe daraus mit willkürlicher Weite cd einen Kreisbogen def. Mit derselben Zirkelöffnung beschreibe man aus d den Bogen ec und aus e den Bogen fg; setze endlich in f ein und schlage eg: beide Bogen schneiden sich in g und es ist dann cg der verlangte Perpendikel.

§. 14.

Aufgabe.

Auf eine gerade Linie ein Loth zu stellen, welches diese Linie halbirt.

Auflösung.

Auf ab (Fig. 18.) nehme man den Punkt c willkürlich, nehme ac in den Zirkel und beschreibe damit aus a und b Bogen, welche einander in d und e schneiden.

Wird nun d mit e verbunden, so ist f der Halbirungspunkt von ab und df steht lothrecht auf ab.

§. 15.

Aufgabe.

Mehrere, z. B. drei gerade Linien auf einmal in eine bestimmte Anzahl gleicher (hier in vier) Theile zu theilen.

Auflösung.

Sind m, n, o und p (Fig. 19.) die gegebenen und in vier gleiche Theile zu theilenden Linien, so nehme man

eine willkürliche Weite a q und trage sie viermal von a bis b; nehme a b in den Zirkel und beschreibe damit aus a und b Bogen, welche sich in c schneiden. Von den Theilpunkten q, r und s ziehe man nach c die Linien c q, c r und c s. Nach dieser Vorbereitung nehme man die Linie m und trage sie auf der a c von c nach d und auf b c von c nach e; ferner trage man n von c nach k und von c nach l und mache c h = c i = o und c f = c g = p.

Zieht man nun k l, h i, f g und d e, so ist die Aufgabe gelöst; es ist nämlich

k l = n,
h i = o,
f g = p und
d e = m;

und jede dieser Linien ist in vier gleiche Theile getheilt.

§. 16.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie a b (Fig. 20.) mit einer andern c d proportional zu theilen.

Auflösung.

Die größere Linie a b nehme man in den Zirkel, trage sie von f nach g und beschreibe aus f und g zwei Bogen, welche sich in h schneiden. Nun ziehe man f h und g h, mache h i = h k = c d und ziehe i k; ferner mache man k l = d e und ziehe nun durch h und l die h m; so ist f g, oder was dasselbe ist, die a b in m mit c d proportional geschnitten; es ist nämlich:

f m : m g = c e : e d.

§. 17.

Aufgabe.

Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Auf einem der Schenkel des rechten Winkels, etwa auf a b (Fig. 21.) nehme man einen willkürlichen Punkt e an; setze den Zirkel in b ein und beschreibe mit b e den Bogen d e. Mit unveränderter Zirkelöffnung beschreibe man aus e und d die Bogen b g und b f.

Zieht man nun **b f** und **b g**, so ist dadurch der rechte Winkel **a b c** in drei gleiche Theile getheilt; es ist nämlich:

$$\mathbf{abf} = \mathbf{fbg} = \mathbf{gbc} = \tfrac{1}{3}\ \mathbf{abc} = \tfrac{1}{3}\ \mathbf{R}.$$

§. 18.

Die Aufgabe: jeden Winkel, dessen Schenkel gerade Linien sind, in drei gleiche Theile zu theilen, das heißt: die **Trisectio anguli** zu vollziehen, kann mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden. Wenn man indeß ein Quadratrix auf eine durchsichtige Fläche, z. B. auf Glas oder Horn gezeichnet hat, so kann man damit ohne Transporteur jeden Winkel nicht nur in drei, sondern in so viel gleiche oder unter sich proportionirte Theile theilen, als man nur will. Um dieses für Manchen interessante Verfahren deutlich zeigen zu können, mag zuvor gewiesen werden, wie man eine krumme Linie konstruirt, die Quadratrix und zwar Quadratrix des Dinostrat genannt wird.

Man zeichne zu dem Ende einen Quadrant **a b c** (Fig. 22.), theile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher (hier z. B. in fünf) Theile und ziehe von den Theilpunkten **d**, **e**, **f** und **g** die Halbmesser **b d**, **b e**, **b f** und **b g**. Nun theile man den Radius **a b** ebenfalls in fünf gleiche Theile und errichte auf demselben in jedem seiner Theilpunkte ein Loth, welches man so lang macht, bis es den ihm korrespondirenden Halbmesser trifft.

Demnach wird das erste Loth **h m** bis an den ersten Radius **b d**, das andere Loth **i n** bis an den zweiten Radius **b e**, das dritte Loth **k o** bis an den dritten Halbmesser **b f**, das vierte Loth **l p** bis **b g** gezogen; wodurch die Durchschnittspunkte **m**, **n**, **o** und **p** sich ergeben, welche dann durch eine krumme Linie **a m n o p q** verbunden werden, welches die Quadratrix ist. Daß diese krumme Linie desto richtiger wird, in je mehr Theile man den Bogen **a** und den Radius **a b** theilt, versteht sich von selbst. Es bleibt indeß allemal unmöglich, den Punkt **q**, wo die Quadratrix den Halbmesser **b c** trifft, zu bestimmen.

Könnte man diesen Punkt **q** genau angeben, so wäre die Quadratur des Kreises zu vollziehen *).

---

*) Eine kleine Schrift, betitelt: „Kurze Anleitung, die Peripherie des Zirkels geometrisch zu rectificiren und den Zirkel in ein Quadrat zu legen, nebst einer Ausrechnung von dem Verhält-

§. 19.

Aufgabe.

Mit Benutzug der Quadratrix einen jeden Winkel in drei und mehrere gleiche Theile, wie auch in solche Theile zu theilen, die unter sich ein bestimmtes Verhältniß haben.

Auflösung.

Man konstruire nach §. 18 ein Quadratrix **a d q** (Fig. 23.), nehme den Winkel **a b c**, welcher in drei oder mehrere gleiche Theile getheilt werden soll, und trage ihn dergestalt an die Quadratrix, daß sein Scheitel **b** nach **b**, der eine Schenkel **a b** auf **a b** und der andere **b c** so zu liegen kommt, daß die Kurve **a d q** in **d** geschnitten wird. Von **d** fälle man auf **a b** das Loth **d e** und theile die **a e** in drei oder in so viel gleiche Theile, als man deren vom Winkel **a b c** verlangt. Aus **f** und **g**, so wie aus allen übrigen etwaigen Theilpunkten, errichte man auf **a b** die Lothe **g h** und **f i**, wodurch die Quadratrix in **h** und **i** geschnitten wird. Zieht man nun **b h** und **b i** ꝛc., so ist der Winkel **a b c** in drei (oder in mehr) gleiche Theile getheilt. Es ist dann **a b h** = **h b i** = **i b d** = $\frac{1}{3}$ **a b c**, oder auch = $\frac{\mathbf{a\,b\,c}}{\mathbf{n}}$, wenn **a e** in **n** gleiche Theile getheilt würde.

Hätte man **a e** nach §. 3 in solche Theile getheilt, die unter sich irgend ein bestimmtes Verhältniß haben, so wäre auch der Winkel **a b c** nach diesem Verhältniß getheilt.

Im Fall der gegebene zu theilende Winkel ein stumpfer ist, so halbire man ihn nach §. 10, theile die eine Hälfte nach dem eben gezeigten Verfahren und nehme je-

---

niß des Durchmessers zur Peripherie des Zirkels, gehörig demonstrirt von einem Liebhaber der mathematischen Wissenschaften. Mit einer Kupfertafel. Frankfurt am Main, bei P. W. Eichenberg 1788" beweist, wie übrigens sonst richtige Sätze zu bedeutenden Verirrungen führen können. Der unbekannte Verfasser benutzt die Quadratrix, rectificirt und quadrirt dreist fort, vergißt aber die Kleinigkeit, daß der §. 18 erwähnte Punkt q niemals genau bestimmt werden kann und wovon doch lediglich die Quadratur des Kreises abhängt. Der Kuriosität wegen soll die in der gedachten Broschüre enthaltene Konstruction §. 189 mitgetheilt werden.

Ozanam erwähnt dieses Gegenstands im vierten Bande seines **Cours de mathematiques etc.** Seite 108.

den Theil zweimal: welches Duplum dann immer ein Theil des stumpfen Winkels ist.

§. 20.

Daß man mit dem Transporteur jeden Winkel bequem theilen kann, ist nicht nur jedem der Mathematik Beflissenen bekannt, sondern es wird auch §. 76 gewiesen werden, wie man dieses Theilen vollziehen kann.

§. 21.

Aufgabe.

Am Ende einer geraden Linie ein Loth auf derselben zu errichten.

Erste Auflösung.

Man nehme außerhalb der Linie **a b** (Fig. 26.), an deren Endpunkt **b** ein Loth errichtet werden soll, einen beliebigen Punkt **c** an, ziehe **b c**, beschreibe aus **b** mit **b c** einen Kreis, welcher die **a b** in **d** schneidet. Zieht man nun durch **d** und **c** die **d e**, so weit bis die Peripherie in **e** getroffen wird, so ist, wenn dann **b e** gezogen wird, diese lothrecht in **b** auf **a b**.

Diese Auflösung enthält das Verfahren, welches man anwendet, um zu untersuchen, ob eine Fläche, z. B. ein Reißbret **a e f g** (Fig. 27.) rechtwinklig ist. Man wählt zu dem Ende einen Punkt **c** auf dem Reißbrete, setzt den einen Fuß des Zirkels in diesen Punkt, öffnet den Zirkel bis an den Scheitel **a** und markirt, indem man einen blinden Bogen beschreibt, die Punkte **b** und **d** auf der Kante des Brets. Jetzt legt man ein Lineal an und sieht zu, ob die Punkte **b**, **c** und **d** in gerader Linie liegen. Ist dies der Fall, so ist das Reißbret rechtwinklig; ist es nicht der Fall, so ist **g a e** entweder stumpf oder spitz und zwar ist dieser Winkel stumpf, wenn der beliebig genommene Punkt **c** außerhalb des Dreiecks **d a b** etwa nach **i** fällt, und spitz ist der Winkel, wenn **c** innerhalb des Dreiecks **a b d** etwa bei **h** liegt.

Andere Auflösung.

Man nehme auf **a b** (Fig. 28.) den Punkt **c** beliebig an und beschreibe aus **b** und **c** mit **b c** zwei Bogen, welche sich in **d** schneiden. Zieht man nun **c d**

und verlängert man diese Linie, bis **d e = c d** wird, so ist, wenn **b** mit **e** verbunden wird, **b e** lothrecht auf **a b**.

Dritte Auflösung.

Man wende die dritte Auflösung des §. 13 an.

§. 22.

Aufgabe.

Von einem außerhalb der Linie **a b** (Fig. 29.) liegenden Punkte **c** einen Perpendikel auf diese Linie zu fällen.

Erste Auflösung.

In der **a b** nehme man **d** willkürlich, ziehe **c d** und beschreibe damit aus **c** einen Bogen **d e**. Mit unveränderter Zirkelöffnung schlage man aus **d** und **e** zwei Bogen, die sich in **f** schneiden. Wird nun **c** mit **f** verbunden, so ist **c g** oder auch **c f** lothrecht auf **a b**.

Andere Auflösung.

Auf der Linie **a b** (Fig. 30.) nehme man zwei Punkte **d** und **e** an, verbinde sie mit dem gegebenen, außerhalb **a b** liegenden Punkt **c** und beschreibe aus **d** mit **c d**, ferner aus **e** mit **c e** Kreise, wodurch die Punkte **c** und **f** erhalten werden und durch welche, wenn man sie verbindet, der von **c** fallende Perpendikel **c f** in **g** auf der **a b** bestimmt ist.

§. 23.

Aufgabe.

Auf einer am Rand einer Fläche gelegenen geraden Linie **a b** (Fig. 31.) aus einem in derselben liegenden Punkte **c** einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung.

Man mache **c d = c f** und **c e = c g**, beschreibe mit **d f** aus **d** und **f** zwei Bogen, die sich in **h** schneiden. Ebenfalls beschreibe man mit **e g** aus **e** und **g** zwei sich in **i** durchschneidende Bogen, verbinde **h** mit **i**, verlängere **h i** bis an **a b** und es ist sodann **c i** das gesuchte Loth.

Anm. Es ist schon der Durchschnitt **h** hinreichend, denn **c h** ist sogleich der verlangte Perpendikel und geht überdieß noch durch **i**.

§. 24.

Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Linie **ab** (Figur 32.) liegenden Punkt **c** eine mit dieser Linie parallel laufende Linie zu ziehen.

Erste Auflösung.

Von **c** fälle man nach §. 22 ein Loth **cd** auf die **ab**, nehme es in den Zirkel und schlage damit aus einem willkürlichen in **ab** liegenden Punkte **e** einen Halbkreis **gif**; ferner beschreibe man aus **f** und **g** mit **fg** zwei Bogen, die sich in **h** schneiden werden. Verbindet man nun **h** mit dem Centrum **e**, so ergibt sich der Punkt **i**, durch welchen man aus **c** die Linie **kl** zieht, die mit **ab** parallel ist.

Andere Auflösung.

Von dem gegebenen Punkte **c** (Fig. 33.) ziehe man in beliebiger Richtung gegen **ab** die **cd**, nehme darauf **e** an und beschreibe mit **de** aus **d** den Bogen **ef** und aus **g** — welcher Punkt beliebig gewählt wird — den Bogen **ik** und ziehe **gh**. Trägt man nun **cd** von **g** nach **l** und zieht man durch **c** und **l** die **mn**, so ist sie mit **ab** parallel. Die Linie **cd** muß man, wenn es angeht, unter einem solchen Winkel legen, der nicht viel von einem rechten abweicht.

§. 25.

Im Fall der gegebene Punkt **c** (Fig. 34.) von **ab** so weit entfernt seyn sollte, daß man ihn von dieser Linie aus nicht mit dem Zirkel erreichen kann, so lege man in die Nähe von **ab** nach dem vorigen §. die **cd** # **ab**. Ist nun **cd** noch zu weit von **c**, so wiederhole man das Verfahren und mache **ef** # **ab**. Liegt nun diese Linie dem Punkte **c** nahe genug, so ziehe man **cg** und verfahre wie §. 24 lehrt.

§. 26.

Aufgabe.

Eine gerade Linie **bc** (Fig. 35.) und ein außer ihr liegender Punkt **a**, nebst einem Winkel α sind gegeben, man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie dergestalt legen, daß si mit

bc einen Winkel bildet, welcher dem gegebenen Winkel α gleich ist.

Auflösung.

Von dem Punkt a ziehe man in beliebiger Lage eine gerade Linie ad und beschreibe damit aus a einen Kreis; verlängere die da, bis sie zum Durchmesser wird, ziehe ef und schlage aus e und f mit ef zwei Bogen, die sich in g schneiden. Nun ziehe man durch g und a die gh, trage an a (§. 5.) auf ah den Winkel α, daß nämlich hak = α werde, und verlängere ak, bis die bc in i geschnitten wird. Es ist sodann bik = α und ik geht durch den gegebenen Punkt a.

§. 27.

Aufgabe.

Durch drei nicht in gerader Linie ligende Punkte a, b und c (Fig. 36.) einen Kreis zu schlagen.

Erste Auflösung.

Die gegebenen Punkte verbinde man durch gerade Linien ab und bc; halbire jede derselben in d und e (§. 6.) und errichte in deren Mittelpunkten die Lothe df und ef, welche so weit verlängert werden müssen, bis sie sich in f schneiden, welcher Punkt dann der Mittelpunkt eines Kreises ist, dessen Peripherie durch a, b und c geht.

Andere Auflösung.

Man öffne, wenn zuvor ab und bc (Fig. 37.) gezogen sind, den Zirkel so weit, daß diese Oeffnung größer, als die Hälfte von ab und bc ist und beschreibe mit dieser Zirkelstellung drei Kreise aus den Punkten a, b und c, welche sich in d, e, f und g schneiden.

Nun verbinde man jegliche zwei Durchschnittspunkte, die in einem Kreise liegen, durch gerade Linien und verlängere dieselben, bis sie sich schneiden: der dadurch bestimmte Punkt h ist dann das Centrum eines Kreises, dessen Peripherie durch die Punkte a, b und c geht.

§. 28.

Nach vorstehender Aufgabe kann man auch zu einem Stücke Kreisbogen, etwa der Ergänzung des Kreises we-

gen, dessen Mittelpunkt finden, wenn man in dem Bogen g b h (Fig. 36.) drei Punkte a, b und c annimmt, sie durch a b und b c verbindet und in ihren Halbirungspunkten die Lothe d f und e f errichtet, wodurch der Mittelpunkt f erhalten wird.

§. 29.

Aufgabe.

In der Peripherie eines Kreises um b (Figur 38.) ist ein Punkt a gegeben, man soll an denselben eine Tangente legen.

Auflösung.

Man ziehe den Halbmesser a b, verlängere ihn, bis a c = a b wird, welches durch einen aus a mit a b zu beschreibenden Halbkreis am leichtesten bewerkstelligt wird. Beschreibt man nun aus b und c mit b c zwei Bogen, so ergibt sich der Durchschnittspunkt d, aus welchem man durch a die verlangte Tangente d e zieht.

§. 30.

Die vorstehende Auflösung heißt ganz kurz also: man ziehe a b und errichte in a auf a b die Normale a d.

§. 31.

Auch kann man die Aufgabe des §. 29 auf folgende Art lösen:

Wenn a (Fig. 39.) der gegebene Punkt ist, so ziehe man den Radius a b, halbire ihn in c, nehme den Radius a b mit dem Zirkel, beschreibe aus c einen Bogen und verlängere a b, bis der Bogen e f in d geschnitten wird. Konstruirt man nun aus d mit der unverändert gelassenen Zirkelöffnung wiederum einen Kreis, so ergeben sich die Durchschnittspunkte e und f, deren Verbindung durch die gerade Linie e f die verlangte Tangente gibt.

§. 32.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und ein außerhalb desselben liegender Punkt gegeben, man soll von demselben Tangenten an den Kreis legen.

Auflösung.

Den gegebenen Punkt a (Fig. 40.) verbinde man durch die a b mit dem Centrum b, mache c d = a d, beschreibe aus a und c mit a c zwei Bogen, die sich in e schneiden; beschreibe aus b mit a b einen Bogen, welcher die durch e und d gehende Linie, in deren Verlängerung, nämlich in f und g schneidet. Nun ziehe man b f und b g, merke die Durchschnitte h und i und ziehe durch sie aus a die Tangenten a l und a k.

§. 33.

Aufgabe.

Den undeutlichen Berührungspunkt einer Tangente a b (Fig. 41.) eines Kreises genau anzugeben.

Erste Auflösung.

In a b (Fig. 41.) nehme man d willkürlich, ziehe c d, beschreibe darüber einen Halbkreis, welcher in seinem Durchschnittspunkte, wo er die Peripherie des gegebenen Kreises schneidet, den Berührungspunkt gibt.

Andere Auflösung.

In a b (Fig. 42.) nimmt man c beliebig, zieht c d, beschreibt aus d mit c d den Bogen c e und aus c und e mit c d die sich in f schneidenden Bogen c f, e f. Zieht man nun d f, so ist g der Berührungspunkt.

§. 34.

Aufgabe.

Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Auflösung.

In der Peripherie des Kreises nehme man zwei Punkte a und b (Fig. 43.) und ziehe a b. Mit a b beschreibe man aus a den Bogen b c und aus b und c mit b c die Bogen b d und c d; verbinde d mit a, verlängere a d bis e; nehme a e in den Zirkel und beschreibe damit aus a und e die Bogen g e f und g a f, welche sich in f und g schneiden. Wird nun f g gezogen, so ist der Durchschnitt h der Mittelpunkt des Kreises.

§. 35.

Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte **c** und **d** (Fig. 44.) geht und eine gerade Linie **ab**, deren Lage gegeben ist, berührt.

Auflösung.

Die Punkte **c** und **d** werden durch die **cd** verbunden und diese Linie wird so weit verlängert, bis sie die **ab** in **e** schneidet. Nun nehme man **df = cd**, beschreibe mit **cf** die Bogen **fg** und **gc** aus **c** und **f**; schlage einen Halbkreis über **ce** und ziehe durch **g** und **d** bis an **h** in der Peripherie des Halbkreises die Linie **gh**. Zieht man nun **eh** und beschreibt man damit den Bogen **hi**, so sind **c**, **d** und **i** die Punkte, durch welche man (§. 27) einen Kreis konstruirt, welcher der Aufgabe entsprechen wird.

Im Fall die gegebenen Punkte **c** und **d** (Fig. 45.) so liegen, daß **cd** mit **ab** parallel ist, so beschreibe man mit **cd** die Bogen **ecf** und **edf** aus **d** und **c**. Zieht man nun **ef**, so sind **c**, **h** und **d** die Punkte, durch welche dann der Kreis gelegt wird. (§. 27.)

§. 36.

Aufgabe.

An zwei gegebene excentrische, ungleich große Kreise Tangenten zu legen, welche die Centrallinie dieser Kreise nicht schneiden, sondern über oder unter derselben liegen.

Auflösung.

Man trage den kleinern Radius **bc** (Fig. 46.) von **d** nach **e**, beschreibe über **ab** einen Halbkreis und aus **a** mit **ae** den Bogen **ef**, ziehe durch **a** und **f** die **ag** und mache **bh # ag**. Die hierdurch erhaltenen Punkte **g** und **h** sind die Berührungspunkte, an welche man die **gh** als Tangente zieht.

§. 37.

Aufgabe.

An zwei ungleich große excentrische Kreise eine Tangente zu legen, welche die Centrallinie **ab** (Fig. 47.) dieser Kreise durchschneidet.

Auflösung.

Den größern Halbmesser **a i** trage man von **c** nach **d**, beschreibe über **a b** einen Halbkreis und aus **b** mit **b d** den Bogen **d e**, ziehe **b e** und mache **a g** parallel mit **b e**. Verbindet man nun die Punkte **f** und **g** durch **f g**, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

§. 38.

Aufgabe.

In einer geraden Linie **a b** (Fig. 48.) ist ein Punkt **c** und außerhalb dieser Linie ein anderer Punkt **d** gegeben; man soll einen Kreis konstruiren, der durch den äußern Punkt **d** geht und die Linie **a b** in **c** berührt.

Auflösung.

Man ziehe **c d**, mache **c e** in **c** lothrecht auf **a b**, halbire **c d** in **f** und stelle **f g** perpendikulär in **f** auf **c d**, mache **f g** so lang, bis die **c e** davon in **g** geschnitten wird, welches dann der Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch **d** geht und **a b** in **c** berührt.

§. 39.

Aufgabe.

Es sind zwei nicht parallele Linien **a b** und **c d** (Fig. 49.) nebst dem Radius **r** eines Kreises gegeben; man soll zwischen diese Linien einen sie berührenden Kreis legen, dessen Halbmesser **r** ist.

Auflösung.

Den Halbmesser **r** trage man normal in einen beliebigen Punkt **e** auf **a b**, dann eben so nach **g** auf **c d**; lege durch **h** die **h i** # **c d** und durch **f** die **f k** # **a b**.

Beide Linien schneiden sich in **l**, welcher Punkt das Centrum des gesuchten Kreises ist, der, wenn man ihn mit **r** aus **l** beschreibt, die Linien **a b** und **c d** berühren wird.

§. 40.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und ein außer demselben liegender Punkt **a** (Fig. 50.) gegeben; man soll

einen andern Kreis konstruiren, der den ersten berührt und durch den Punkt a geht.

Auflösung.

Man nehme in der Peripherie des gegebenen Kreises einen Punkt b an, der in der Nähe von a liegt, ziehe ab und dann den Radius be, halbire ab in c, mache cd auf ab in c lothrecht und so lang, bis dadurch die Verlängerung von eb in d getroffen wird. Es ist sodann bd der Halbmesser und d der Mittelpunkt des Kreises, der den gegebenen Kreis um e berührt und durch a geht.

§. 41.

Aufgabe.

In einem Kreise um d (Fig. 51.) ist ein Punkt a und eine außer dem Kreise liegende Linie bc gegeben; man soll einen andern Kreis ziehen, der den ersten in a und die Linie bc berührt.

Auflösung.

Den Punkt a verbinde man mit dem Centrum d, mache ae lothrecht auf ad und halbire den Winkel aef. Wo die Halbirungslinie den verlängerten Radius ad in f schneidet, da ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher der Forderung genügt.

§. 42.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und eine gerade Linie ab (Fig. 52.) gegeben, es soll an den Kreis eine Tangente dergestalt gelegt werden, daß, wenn man in den Endpunkten c und d des Durchmessers cd, Perpendikel cf und de errichtet, diese von der gedachten Tangente ein Stück abschneiden, welches der gegebenen Linie ab gleich ist.

Auflösung.

Auf dem einen Perpendikel de nehme man einen Punkt e an und trage aus ihm die Linie ab von e nach f.

Von dem Mittelpunkt g fälle man auf ef das Loth gh, welches den Kreis in i schneidet. Zieht man nun durch i die kl parallel mit ef, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 43.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis um **a** (Fig. 53.) und darin ein Radius **ab** seiner Lage nach bestimmt; ferner ist eine gerade Linie **cd** gegeben; man soll diese Linie dergestalt als Tangente an den Kreis legen, daß, wenn man den Halbmesser verlängert, diese Verlängerung in den Endpunkt **g** der Tangente **gh** fällt.

Auflösung.

Von **ab** in **b** fälle man den Perpendikel **be** und mache ihn = **cd**, ziehe **ae**, beschreibe damit aus **a** den Bogen **eg**, welcher die Verlängerung **bf**, des Radius **ab** in **g** trifft. Ueber **ag** beschreibe man einen Halbkreis, wodurch der Punkt **h** erhalten wird. Verbindet man nun diesen Punkt mit **g**, das heißt zieht man **gh**, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

§. 44.

Aufgabe.

Ein Winkel **bac** (Fig. 54.), ferner ein Kreis um **d**, welcher einen Schenkel **ab** des Winkels berührt, sind gegeben; man soll zwischen die Schenkel dieses Winkels einen andern Kreis legen, welcher die gedachten Schenkel und den gegebenen Kreis berührt.

Auflösung.

Durch die Linie **am** halbire man den Winkel **bac**, nehme auf **am** in der Nähe des Scheitels **a** einen Punkt **x** willkürlich an und fälle von demselben auf denjenigen Schenkel **ab**, an welchem der gegebene Kreis um **d** liegt, einen Perpendikel **xf**. Ferner mache man **fg** (die Verlängerung von **fx**) dem Radius **dn** des gegebenen Kreises gleich, lege durch **g** die **gh** parallel mit **ab** und mache sie so lang, bis sie von der verlängerten **am** in **h** getroffen wird. Nun ziehe man **dh**, mache **xi** = **xg** und **dk** # **xi**, und es ist dann **k** der Mittelpunkt des verlangten Kreises, welcher, wenn man denselben mit dem Halbmesser **kl** beschreibt, die beiden Schenkel des gegebenen Winkels und den Kreis um **d** berührt.

§. 45.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und eine außerhalb desselben liegende Linie **ab** (Fig. 55.) gegeben; man soll einen andern Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die gegebene Linie berührt.

Auflösung.

Man ziehe **cd** willkürlich, doch so, daß die **ab** daran in **d** geschnitten wird, errichte in **e** auf **cd** das Loth **ef**, halbire den Winkel **efd** durch **fg** und es ist dann **g** das Centrum des verlangten Kreises, dessen Halbmesser **eg** ist.

§. 46.

Aufgabe.

In einen Quadrant **abc** (Fig. 56.) einen Kreis zu zeichnen, welcher den Kreisbogen und die Radien berührt.

Auflösung.

Man halbire den Bogen **ab** in **d**, ziehe **cd**, lege an **d** eine Tangente **de**, mache sie so lang, bis sie von der Verlängerung der **ac** in **e** geschnitten wird. Nun mache man **cf = cd** und setze **fg** in **f** normal auf **ac**, so ist **g** das Centrum, **fg** aber der Radius des gesuchten Kreises.

§. 47.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel **bac** (Fig. 57.) und ein Punkt **d**, welcher zwischen den Schenkeln des gedachten Winkels liegt, gegeben; man soll einen Kreis konstruiren, der die beiden Schenkel berührt und durch den Punkt **d** geht.

Auflösung.

Durch **ae** halbire man den Winkel **bac**, nehme den Punkt **f** in **ae** beliebig, mache **fg** lothrecht auf **ab**, verbinde **d** und **a** mit **ad**, mache **fh = fg** und **di # hf**; **i** ist sodann der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

§. 48.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel **bac** (Fig. 58.) und zwischen seinen Schenkeln ein Kreis um **h** gege-

ben; man soll einen andern Kreis beschreiben, der die Schenkel des gegebenen Winkels und den Kreis um h berührt.

Auflösung.

Durch ad halbire man den gegebenen Winkel bac, errichte in a auf ab das Loth ae = hm = dem Halbmesser des gegebenen Kreises um h. Durch e lege man ef # ab, ziehe gh, nehme gi willkürlich auf ad, doch aber so an, daß i noch zwischen den Kreis um h und den Punkt g fällt. Ferner fälle man von i auf ef das Loth ik und mache il = ik und ziehe durch h die hn # il; der Punkt n ist dann das Centrum und mn der Radius des in der Aufgabe verlangten Kreises.

§. 49.

Aufgabe.

In eine von zwei nicht parallelen Linien ꝛc. ab und cd (Fig. 65.) eingeschlossene Ebene soll ein Kreis, dessen Halbmesser der gegebenen Linie r gleich ist, so gelegt werden, daß er diese Linien berühre.

Auflösung.

In e auf der ab und in g auf der cd (welches beliebig genommene Punkte sind) errichte man die Lothe ef und gh = r. Wird durch f die ik # ab und durch h die lm # cd gelegt, so ist der hierdurch entstandene Durchschnittspunkt n das Centrum, aus welchem mit r ein die Linien ab und cd berührender Kreis geschlagen werden kann.

§. 50.

Mehreres über Kreise und Linien, die sich berühren, enthält die zwölfte Abtheilung von §. 348 an und es wird daher dorthin verwiesen. Ein eigener Abschnitt wurde diesem eben so interessanten, als wichtigen Gegenstande gewidmet und es findet darin der Maschinenzeichner diesen Theil der Konstructionen, welchen er so recht eigentlich nothwendig hat, in Vollständigkeit zusammengestellt.

§. 51.

Aufgabe.

Einen sehr großen Kreisbogen, z. B. auf dem Felde, zu beschreiben.

Auflösung.

Nach einem verjüngten Maasstabe zeichne man einen Kreisbogen d a b c (Fig. 59.) zu dem gegebenen Halbmesser, nehme in demselben drei Punkte a, b und c an, ziehe die Sehnen a b, b c und messe den Winkel a b c. Hierauf befestige man zwei Lineale a b f g und b c e f bei b oder bei f dergestalt an einander, daß sie den von den Sehnen gebildeten Winkel a b c bilden. Nun schlage man bei a, b und c Pfähle ein, rücke das eben gefertigte Instrument so, daß es immer an den Pfählen bleibt, weiter fort, z. B. gegen d zu und merke die Punkte h, i ꝛc. an, welche durch den Scheitel des Instruments bestimmt werden. Die Punkte a, i, h, b ꝛc. werden dann zusammengezogen, weshalb sie denn auch so nahe an einander, als möglich, genommen werden müssen, damit die dadurch bestimmte krumme Linie, welches der verlangte Kreisbogen ist, desto richtiger erhalten werde. Am besten ist es, wenn man bei b einen kleinen eisernen Ring anbringt, in diesen einen Stab steckt, und während das Instrument fortgeschoben wird, den Bogen mit dem Stab in den Boden eingräbt.

§. 52.

Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien a b und c g (Figur 60.), die sich bei e schneiden, gegeben. Dieser Durchschnittspunkt aber ist, weil die Linien zu nahe an einander liegen, weil sie einen zu kleinen Winkel b e d machen, unbestimmt; man soll daher den Punkt e genau angeben.

Auflösung.

Auf einer der beiden sich schneidenden Linien, etwa auf b e, nehme man zwei, drei, besser aber noch mehr Punkte f, h, k an und errichte in jedem derselben auf b e ein Loth f o, h n und k u. Nun nehme man von dem Perpendikel f o den untersten Theil f g in den Zirkel und trage denselben mehrere Male, z. B. dreimal von g gegen o. Eben so viel mal setze man h i auf h n ab und eben so oft wird k l von k nach u getragen. Jetzt lege man durch die Punkte g, i und l, ferner durch m, p, s, ferner durch n, q, t und durch o, n, u gerade Linien, welche bei genügender Verlängerung sich nicht nur in ei-

nem Punkt e schneiden, sondern dadurch auch den unbestimmten Durchschnittspunkt genau und deutlich angeben werden. Je höher man die Lothe fo, nh und ku macht, je öfter man nämlich die Theile fg, hi und kl in die Höhe setzt, desto genauer wird der Punkt e bestimmt.

§. 53.

Aufgabe.

In dem Schenkel ab (Fig. 61.) des Winkels b ist ein Punkt d gegeben; man soll auf denselben Schenkel (ab) von dem andern Schenkel bc, aus einem in demselben liegenden Punkte h ein Loth hi so fällen, daß die Länge dieses Loths so groß ist, wie die Entfernung des Punkts i von d.

Auflösung.

Auf ab errichte man in d das Loth de, mache df = de, ziehe ef, beschreibe aus e und f mit ef zwei in g sich schneidende Bogen, ziehe gd und fälle von h auf ab das Loth hi; es ist dann

hi = id.

§. 54.

Aufgabe.

Die Seiten ab und cd (Fig. 62.) irgend einer ebenen Fläche sind nicht parallel. Man soll durch einen in dieser Fläche liegenden Punkt e eine gerade Linie no dergestalt ziehen, daß sie bei hinreichender Verlängerung in denselben Punkt kommt, welche die beiden konvergirenden Linien ab und cd, wenn sie verlängert werden, gemein haben.

Auflösung.

Durch den gegebenen Punkt e ziehe man fg mit ab und hi mit cd parallel. Aus e beschreibe man mit willkürlichem Halbmesser ek den Bogen kl und halbire denselben in m. Wird nun durch diesen Punkt m und durch e die Linie no gezogen, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 55.

Aufgabe.

Zwei Linien **ab** und **cd** (Fig. 63.), welche nebst **ac** und **bd** die ebene Fläche **abcd** begrenzen und nicht parallel gehen, sind nebst einem zwischen ihnen liegenden Punkt **e** gegeben; man soll auf diese Linien eine dritte Linie **hi** ziehen, welche mit den gegebenen Linien **ab** und **cd** gleiche Winkel **ahi** und **cih** macht.

Auflösung.

Ganz so wie im vorigen §. bestimme man **on** und errichte in **e** auf **on** die Normale **hi**: es ist dann

ahi = cih.

§. 56.

Aufgabe.

Eine Ebene **abcd** (Fig. 64.) ist auf zwei Seiten von zwei nicht parallelen Linien **ab** und **cd** begrenzt. Man soll zwischen diese Linien eine andere Linie **kl** dergestalt legen, daß sie genau in der Mitte der erstgedachten Linien (**ab** und **cd**) und zwar so zu liegen kommt, daß, wenn man sie verlängert, diese Verlängerung in denjenigen Punkt fällt, in welchem sie die Linien **ab** und **cd** treffen würden, wenn man sie ebenfalls verlängert hätte.

Auflösung.

Auf **ab** nehme man **m** willkürlich, ziehe **me** mit **cd** parallel, nehme auch **f** auf **me** beliebig und mache **gm = fm**. Nun ziehe man durch **g** und **f** eine gerade Linie **gh**, halbire sie in **i** und setze die Linie **kl** auf **gh** in **i** lothrecht: sie ist die gesuchte Linie.

§. 57.

Die Aufgaben der §§. 51, 52, 53, 54, 55 und 56 sind für Feldmesser und Bauprofessionisten von großem Nutzen.

Zweite Abtheilung.

Konstruction regulärer Figuren in den Kreis; oder Anweisung, die Kreisperipherie in gleiche Theile zu theilen.

§. 58.

Das Konstruiren regulärer Figuren in den Kreis oder das sogenannte Einschreiben der Figuren, beruht lediglich auf dem Eintheilen der Kreisperipherie in so viel gleiche Theile, als wieviel Seiten die einzuschreibende Figur haben soll. Mehrere der hier vorkommenden Eintheilungsmethoden sind erweisbar, viele, wohl eigentlich die meisten derselben sind es nicht und wurden nur deshalb hier aufgenommen, da sie in der Ausübung, in der sogenannten Praxis, dennoch anwendbar und von vielem Nutzen und die durch sie entstehenden etwaigen Fehler so klein sind, daß man sie füglich als nicht vorhanden annehmen kann. Allemal gelangt man beim Eintheilen der Kreisperipherien durch Anwendung der Konstructionen leichter, als durch das übliche Verfahren zum Ziele. Der Zeichner macht auf das Papier weniger Stiche und es kann daher die Arbeit sauberer werden. Vollzieht man vollends die Konstructionen bei sehr großen Figuren, etwa in Gärten oder auf Feldern mit Schnuren und Pfählen, so wird man ihnen (den Konstructionen) unbedingt vor jedem andern Verfahren den Vorzug lassen. Daß man indeß mit dem Astrolabium oder mit der Boussole weit leichter zum Zwecke kommt, als es bei jeder andern Verfahrungsart der Fall ist, versteht sich von selbst, da mit Anwendung dieser Instrumente das Abstecken regulärer Vielecke, das Eintheilen der Kreise eine sehr einfache und sichere Operation ist.

§. 59.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, oder den Kreis in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man nehme in der Peripherie des Kreises einen beliebigen Punkt a (Fig. 66.) an, ziehe durch denselben den Durchmesser af, beschreibe aus a mit dem Halbmesser ac

den Bogen d c e und es ist hierdurch die Peripherie in d, e und f in drei gleiche Theile getheilt. Verbindet man nun diese Theilpunkte durch die Linien d f, d e, e f, so ist d e f das gleichseitige Dreieck, dessen Seiten Sehnen des Kreises um c vom Halbmesser a c sind.

§. 60.

Aufgabe.

In einen Kreis ein Quadrat zu zeichnen, d. h. die Peripherie des Kreises in vier gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man nehme a (Fig. 67.) willkürlich in der Peripherie des Kreises an, ziehe durch den Mittelpunkt c den Durchmesser a b, beschreibe damit aus a und b die Bogen a d und b d; sie schneiden sich in d. Zieht man nun durch c und d die d e, so ist die Peripherie bei a, e, b und f in vier gleiche Theile getheilt und a e b f ist, nachdem a e, b e, b f und a f gezogen werden, das in den Kreis eingeschriebene Quadrat.

§. 61.

Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, oder den Kreis in fünf gleiche Theile zu theilen.

Erste Auflösung.

Man errichte auf dem Durchmesser a b (Fig. 68.) den Halbmesser c d senkrecht, halbire a c in e, ziehe d e und beschreibe damit aus e den Bogen d f. Zieht man d f, so ist dies die Seite des regulären Fünfecks, welche, wenn sie nach g, h, i und k als Sehne in die Peripherie getragen wird, diese in fünf gleiche Theile theilt und das reguläre Fünfeck bildet.

Andere Auflösung.

Auf dem Durchmesser a b (Fig. 69.) errichte man den Radius c d senkrecht und theile durch Versuche oder nach §. 18 den Viertelkreis b d in fünf gleiche Theile. Nun nehme man vier solcher Theile, nämlich b e in den Zirkel und ziehe b e, welches dann die Seite des regulären Fünfecks

ist, die in der Peripherie fünfmal als Sehne herumgetragen werden kann *).

§. 62.

Wird ein Viertelkreis in sechs, sieben, acht, neun ꝛc. oder in n gleiche Theile getheilt und nimmt man vier solcher Theile in den Zirkel, so läßt sich diese Bogenlänge allemal sechs=, sieben=, acht=, neunmal ꝛc. oder allgemein: nmal im Kreise herumtragen und es kann hiernach jedes Vieleck konstruirt werden.

Obschon dieses Verfahren deshalb, weil dabei ein Versuchen vorkommt, nicht so eigentlich zu den geometrischen Konstructionen gehört, so wurde es doch mitgetheilt, weil man sich dessen in vielen Fällen mit Vortheil zu bedienen pflegt.

§. 63.

Aufgabe.

Ein reguläres Sechseck in den Kreis zu zeichnen, oder die Peripherie des Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Aus einem beliebig in der Peripherie angenommenen Punkt a (Fig. 70.) ziehe man den Durchmesser ab, beschreibe aus a mit dem Radius ac den Bogen dce, ziehe durch c und d, ferner durch e und c die dg und die ef, wodurch dann die Peripherie in sechs gleiche Theile bei a, d, f, b, g und e getheilt und adfbge das reguläre Sechseck in dem gegebenen Kreise ist.

Man darf also nur den Halbmesser eines Kreises in den Zirkel nehmen und als Sehne in der Peripherie herumtragen, wodurch diese allemal in sechs gleiche Theile getheilt wird.

§. 64.

Aufgabe.

Ein reguläres Siebeneck zu konstruiren, oder die Peripherie in sechs gleiche Theile zu theilen.

---

*) Diese Auflösung verlangt, wenn nicht §. 18 angewendet wird, ein Versuchen und ist daher keine reine Konstruction.

Auflösung.

Man ziehe den Halbmesser **a c** (Fig. 71.) und beschreibe damit aus **a** den Bogen **b c d**. Zieht man nun **b d**, so wird **a c** in **e** geschnitten und es ist sodann **b e** die Seite des regulären Siebenecks, wodurch, wenn man sie von **b** nach **f** trägt, der Bogen **a b** ein Siebentel der Peripherie wird. Setzt man nun **a b** von **a** nach **g** und so weiter nach **h**, **i**, **k** und **l**, so ist in diesen Punkten die Peripherie in sieben gleiche Theile getheilt, und wenn man die Sehnen **a g**, **g h**, **h i**, **i k**, **k l** und **b l** zieht, so ist das verlangte Siebeneck erhalten *).

§. 65.

Aufgabe.

Ein reguläres Achteck zu konstruiren, oder den Kreis in acht gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser **a b** (Fig. 72.), beschreibe damit aus **a** und **b** zwei Bogen, lege durch deren Durchschnittspunkt **d** und durch den Mittelpunkt **c** die **d f**, ziehe **a e**, beschreibe damit aus **a** und **e** wiederum zwei Bogen, die sich in **g** schneiden und lege durch **g** und **c** die **g i**. Zieht man nun **e h** und beschreibt man damit aus **e** den Bogen **h k**, so ist, wenn man durch **k** und **c** die **k l** legt, der Kreis bei **a**, **h**, **e**, **k**, **b**, **i**, **f** und **l** in acht gleiche Theile getheilt; und wenn man die genannten Theilpunkte durch gerade Linien **a h**, **h e**, **e k**, **b k**, **b i**, **f l** und **a l** verbindet, so ist das Achteck konstruirt.

§. 66.

Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Neuneck zu zeichnen, oder den Kreis in neun gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe den Radius **a c** (Fig. 73.), beschreibe damit aus **a** den Bogen **b c d**, ziehe **b d** und verlängere diese Linie, bis **e f = a c** wird. Nun beschreibe man mit **e f** aus **e** und **f** die Bogen **f g** und **e g**, welche sich in **g** schneiden und ziehe die Linie **c g**, welche die Peripherie in **h** schneidet und den Bogen **b h** bestimmt, welcher der

*) Diese Konstruction ist nur näherungsweise richtig.

neunte Theil der Peripherie ist. Zieht man endlich b h, so ist dies die Seite des regulären Neunecks. Doch gilt dieses ebenfalls blos näherungsweise.

§. 67.

Aufgabe.

Ein reguläres Zehneck zu konstruiren, oder den Kreis in zehn gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Auf den Durchmesser a b (Fig. 74.) setze man den Halbmesser c d normal, halbire a c in e, ziehe d e, mache d f = d e und es ist dann c f die Seite des regulären Zehnecks, und folglich ist auch dadurch der Kreis in zehn gleiche Theile getheilt, wenn c f als Sehne in der Peripherie herumgetragen wird.

§. 68.

Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Eilfeck zu konstruiren, oder den Kreis in eilf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe den Radius a c (Fig. 75.) und schlage damit aus a den Bogen b d, ziehe b d, beschreibe aus a und e mit a e zwei Bogen, die sich in f schneiden. Den Bogen e f aber verlängere man bis g an die Peripherie des gegebenen Kreises, ziehe f g und beschreibe damit aus g den Bogen f h. Wird nun h mit e verbunden, so ist e h die Seite des regulären Eilfecks, wodurch, wenn man sie als Sehne in der Peripherie herumträgt, diese nicht nur in eilf gleiche Theile getheilt, sondern auch das reguläre Eilfeck verzeichnet wird. (Blos näherungsweise.)

§. 69.

Aufgabe.

Ein reguläres Zwölfeck in den Kreis zu legen, oder die Peripherie in zwölf gleiche Theile zu theilen.

Erste Auflösung.

Aus a (Fig. 76.) schlage man mit dem Halbmesser a c einen Bogen c b d und beschreibe aus b mit derselben

Zirkelöffnung den Bogen a d. Wird nun der dadurch erhaltene Punkt d mit c oder c d verbunden, so ist, wenn man a mit e durch a e verbindet, dies die Seite des Zwölfecks und der Bogen a e ist der zwölfte Theil der Peripherie.

Zweite Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser a b (Fig. 77.), beschreibe damit aus a und b die Bogen b d und a d, verbinde deren Durchschnittspunkt d mit c und schlage aus a mit a c den Bogen c e. Wird nun e f gezogen, so ist diese Linie die Seite des regulären Zwölfecks und der Bogen e f ist der zwölfte Theil der Peripherie.

§. 70.

Da keine besondere Konstruction für das Dreizehneck vorhanden ist, so mag die Auflösung der folgenden Aufgabe das Verfahren zeigen, wodurch jeder Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Ob dieser Operation, welche nach ihrem Erfinder Renaldinus die Renaldinische Regel genannt wird, jegliche Schärfe abgeht, so ist sie doch auch vielfältig anwendbar und sie bleibt unter allen Umständen eine sinnreiche Erfindung.

§. 71.

Aufgabe.

Die Peripherie des Kreises in jede beliebige Anzahl (z. B. in dreizehn) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

An den dem Durchmesser a b (Fig. 78.), so wie der Peripherie gemeinschaftlichen Punkt a lege man unter beliebiger Neigung gegen den Durchmesser eine gerade Linie a i von willkürlicher Länge, und trage darauf von a an so viel beliebig große Theile (hier dreizehn), als in wie viel gleiche Theile die Peripherie getheilt werden soll und verbinde den letzten, hier den dreizehnten Theil e mit b. Durch den zweiten *) Theilpunkt d lege man die d f

*) Es wird allemal der zweite Theilpunkt genommen, die Peripherie mag in viel oder in wenig Theile getheilt werden.

b e und beschreibe mit dem Durchmesser a b aus a und b die Bogen a g und b g, welche sich in g schneiden. Zieht man nun durch g und f die g h bis an die Peripherie, so ist der Bogen a h der dreizehnte Theil der Peripherie und die Linie a h ist die Seite des regulären Dreizehnecks.

Hätte man von a nach e neunzehn, einundzwanzig, zweiundzwanzig, dreiundzwanzig ꝛc. oder n Theile getragen, so würde die allemal durch den zweiten Punkt gehende Linie g h den neunzehnten, einundzwanzigsten ꝛc. oder nten Theil der Peripherie angegeben haben.

Den Winkel b a i muß man nicht allzu spitz, stumpf aber niemals annehmen; auch muß man darauf sehen, daß die willkürlich großen Theile, wie a k, k d ꝛc., so groß werden, daß b e wo möglich mit a b einen rechten Winkel mache, oder sich ihm nähere.

§. 72.

Durch Anwendung des vorigen §. kann jedes Vieleck konstruirt werden und es ist leicht einzusehen, daß man aus jedem Polygon von 5, 6, 7, 8, 9, 10 .... und n Seiten allemal ein solches Vieleck bilden kann, welches noch einmal so viel Seiten hat; man kann nämlich ein 10, 12, 14, 16, 18, 20 .... und 2 n Eck bilden, wenn man §. 11 anwendet. Würde man z. B. den Bogen b g (Fig. 70.) halbiren, so würde man die Peripherie bei h in zwölf gleiche Theile theilen, und bei Fortsetzung dieses Verfahrens würden auf einfache Weise 24, 48, 96 ... Ecks erhalten werden können.

§. 73.

Aufgabe.

Ein Siebenzehneck zu konstruiren, oder die Peripherie des Kreises in siebenzehn gleiche Theile zu theilen *).

Auflösung.

Auf den Durchmesser a b (Fig. 79.) bringe man den Radius c d normal in den Kreis, beschreibe damit aus a

---

*) Der Erfinder dieser Konstruction ist der Studiosus der Mathesis Rischer aus Langenbielau in Schlesien. Sie trifft nur näherungsweise zu.

den Bogen c e, fälle von e auf a c das Loth e f und ziehe a d. Das hierdurch auf e f abgeschnittene Stück e g ist die Sehne eines regulären Siebenzehnecks.

§. 74.

Nimmt man von einem und demselben Kreise zwei ungleich große Bogen, von denen jeder irgend ein aliquoter Theil der Peripherie ist, und zieht man den kleinern Bogen von dem größern ab, so gibt der Unterschied allemal wieder einen Bogen, der auch ein aliquoter Theil der ganzen Peripherie des genommenen Kreises ist. So erhält man, wenn man z. B. den sechsten Theil der Peripherie von ihrem fünften Theil abzieht, einen Bogen zur Differenz, welcher der dreißigste Theil der Peripherie ist. Denn es ist

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

Hätte man ferner einen Bogen, welcher ein Viertel der ganzen Peripherie ist, von einem Bogen abgezogen, welcher ein Fünftel derselben Peripherie ausmacht, so würde man einen Bogen erhalten haben, der zu einem Zwanzigeck gehört; denn es ist

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Und so kann man auf ähnliche Art durch das Verbinden der Bogen zweier Polygone in einem Kreise die Konstructionen für viele andere Winkel auffinden. Konstruirt man z. B. bei Fig. 80 nach §. 61, zieht man a b und macht man c d darauf lothrecht, halbirt man ferner a c in e, zieht man d e und macht e f = e d, so ist bekanntlich d f die Seite des Fünfecks. Beschreibt man nun aus d mit d f den Bogen f g, so ist a g der zwanzigste Theil der Peripherie. Ist a b (Fig. 81.) die Seite des regulären Siebenecks und a c die des regulären Achtecks, so muß b c der sechsundfunfzigste Theil der Peripherie seyn.

§. 75.

Aufgabe.

Einen Transporteur zu zeichnen.

Auflösung.

Aus dem Mittelpunkte c (Fig. 82.) einer geraden beliebig langen Linie s t beschreibe man vier Halbkreise mit willkürlichen Halbmessern c d, c o, c p und c a. Aus e

schlage man mit **ce** den Bogen **cf** und aus **f** mit derselben Zirkelöffnung den Bogen **cg**; ziehe durch **c** und **f** die **ci** und durch **c** und **g** die **ch**. Ferner beschreibe man mit **bi** aus **b**, **i**, **h** und **a**, wie die Figur zeigt, sechs Bogen, welche sich in **k**, **l** und **m** schneiden und ziehe **ck**, **cl** und **cm**. Hiernach ist jeder der Bogen **bp**, **pi**, **io**, **oh**, **hn** und **an** der sechste Theil des Halbkreises und enthält 30°.

Man theile daher jeden dieser Bogen bei **q**, **r** ꝛc. in sechs gleiche Theile und jeden dieser Theile dann in fünf gleiche Theile; welches ganze Grade sind, die durch koncentrische, zwischen den gezogenen vier Bogen liegende Linien abgetheilt werden.

Auch kann man die ganzen Grade noch in halbe und Viertelgrade abtheilen. Zuletzt schreibe man die Zahlen in das Instrument.

Der Gebrauch des Transporteurs zum Messen und Auftragen der Winkel ist so bekannt, daß hierüber keine besondere Erläuterung gegeben wird.

§. 76.

Aufgabe.

Einen Kreis mit Hilfe des Transporteurs in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man theile die Zahl 360 durch diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile der Kreis getheilt werden soll, merke den Quotient und ziehe den Durchmesser **ab** (Figur 83a). Nun lege man den Transporteur so an den Durchmesser, daß dessen Centrum **c** in das des Kreises kommt und zähle an dem Rande des Instruments von **n** nach **h** so viel Grade ab, als der gefundene Quotient Einheiten enthält. Eben so viel Grade zähle man von **h** nach **i** ab, ferner von **i** nach **k**, von **k** nach **l**, von **l** nach **m** und so fort, bis man den ganzen Halbkreis durchgegangen ist, und ziehe die Radien **cd** durch **h** und **d**; **ce** durch **c** und **i** und so weiter **cf**, **cg** ꝛc.

Wenn nach diesem Verfahren der obere Halbkreis getheilt ist, so wende man den Transporteur dergestalt, daß sein Theilrand (Limbus) herab gegen **o** kommt und verfahre wie zuvor.

Dritte Abtheilung.

Konstruction geradliniger Figuren um und in den Kreis; ferner geradliniger Figuren um und in geradlinige Figuren ꝛc.

§. 77.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruiren, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, d. h. welches mit dem erstern gleiche Winkel hat.

Auflösung.

In den gegebenen Kreis lege man den Radius **f g** (Fig. 83b). Nun verlängere man irgend eine Seite **a c** des gegebenen Dreiecks **a b c** und trage den einen äußern Winkel, z. B. α in **f** an die **f g**, so daß **h f g** $= \alpha$ werde. Ebenfalls trage man den andern Winkel β in **f** an die **f h**, so daß **h f i** $= \beta$ werde. Konstruirt man nun nach §. 29 an die Punkte **g**, **h** und **i** Tangenten und verlängert man sie, bis sie sich in **k**, **l** und **m** schneiden, so ist

$$\Delta\ \mathbf{k\,l\,m} \backsim \Delta\ \mathbf{a\,b\,c}$$

und zwar ist

$$\mathbf{k} = \mathbf{a\,c\,b} = \delta$$
$$\mathbf{l} = \mathbf{b\,a\,c} = \gamma \text{ und}$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{a\,b\,c} = \mu.$$

§. 78.

Aufgabe.

Um einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Der Punkt **b** (Fig. 84.) ist willkürlich und **b e** ist der Durchmesser; aus **b** mit dem Halbmesser **a b** beschreibe man den Bogen **c a d** und lege an jeden der Punkte **c**, **d** und **e** eine Tangente (§. 29.), wodurch das gleichseitige Dreieck **f g h**, welches um den Kreis liegt, erhalten wird.

§. 79.

Aufgabe.

Um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

schlage man mit **ce** den Bogen **cf** und aus **f** mit derselben Zirkelöffnung den Bogen **cg**; ziehe durch **c** und **f** die **ci** und durch **c** und **g** die **ch**. Ferner beschreibe man mit **bi** aus **b**, **i**, **h** und **a**, wie die Figur zeigt, sechs Bogen, welche sich in **k**, **l** und **m** schneiden und ziehe **ck**, **cl** und **cm**. Hiernach ist jeder der Bogen **bp**, **pi**, **io**, **oh**, **hn** und **an** der sechste Theil des Halbkreises und enthält 30°.

Man theile daher jeden dieser Bogen bei **q**, **r** ꝛc. in sechs gleiche Theile und jeden dieser Theile dann in fünf gleiche Theile; welches ganze Grade sind, die durch koncentrische, zwischen den gezogenen vier Bogen liegende Linien abgetheilt werden.

Auch kann man die ganzen Grade noch in halbe und Viertelgrade abtheilen. Zuletzt schreibe man die Zahlen in das Instrument.

Der Gebrauch des Transporteurs zum Messen und Auftragen der Winkel ist so bekannt, daß hierüber keine besondere Erläuterung gegeben wird.

§. 76.

Aufgabe.

Einen Kreis mit Hilfe des Transporteurs in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man theile die Zahl 360 durch diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile der Kreis getheilt werden soll, merke den Quotient und ziehe den Durchmesser **ab** (Figur 83a). Nun lege man den Transporteur so an den Durchmesser, daß dessen Centrum **c** in das des Kreises kommt und zähle an dem Rande des Instruments von **n** nach **h** so viel Grade ab, als der gefundene Quotient Einheiten enthält. Eben so viel Grade zähle man von **h** nach **i** ab, ferner von **i** nach **k**, von **k** nach **l**, von **l** nach **m** und so fort, bis man den ganzen Halbkreis durchgegangen ist, und ziehe die Radien **cd** durch **h** und **d**; **ce** durch **c** und **i** und so weiter **cf**, **cg** ꝛc.

Wenn nach diesem Verfahren der obere Halbkreis getheilt ist, so wende man den Transporteur dergestalt, daß sein Theilrand (Limbus) herab gegen **o** kommt und verfahre wie zuvor.

Dritte Abtheilung.

Konstruction geradliniger Figuren um und in den Kreis; ferner geradliniger Figuren um und in geradlinige Figuren 2c.

§. 77.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruiren, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, d. h. welches mit dem erstern gleiche Winkel hat.

Auflösung.

In den gegebenen Kreis lege man den Radius **f g** (Fig. 83b). Nun verlängere man irgend eine Seite **a c** des gegebenen Dreiecks **a b c** und trage den einen äußern Winkel, z. B. α in **f** an die **f g**, so daß **h f g** $= \alpha$ werde. Ebenfalls trage man den andern Winkel β in **f** an die **f h**, so daß **h f i** $= \beta$ werde. Konstruirt man nun nach §. 29 an die Punkte **g**, **h** und **i** Tangenten und verlängert man sie, bis sie sich in **k**, **l** und **m** schneiden, so ist

$$\Delta\ \mathbf{k\,l\,m} \backsim \Delta\ \mathbf{a\,b\,c}$$

und zwar ist

$$\mathbf{k} = \mathbf{a\,c\,b} = \delta$$
$$\mathbf{l} = \mathbf{b\,a\,c} = \gamma \text{ und}$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{a\,b\,c} = \mu.$$

§. 78.

Aufgabe.

Um einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Der Punkt **b** (Fig. 84.) ist willkürlich und **b e** ist der Durchmesser; aus **b** mit dem Halbmesser **a b** beschreibe man den Bogen **c a d** und lege an jeden der Punkte **c**, **d** und **e** eine Tangente (§. 29.), wodurch das gleichseitige Dreieck **f g h**, welches um den Kreis liegt, erhalten wird.

§. 79.

Aufgabe.

Um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser **ab** (Fig. 85.), beschreibe damit zwei Bogen, die sich in **d** schneiden; ziehe durch **d** und **c** die **de** und beschreibe aus **a**, **e**, **b** und **f** mit dem Halbmesser **ce** vier Bogen, die sich in **g**, **h**, **i** und **k** schneiden. Verbindet man diese Durchschnittspunkte, so erhält man das Quadrat **ghik**, welches um den Kreis konstruirt ist *).

§. 80.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Vieleck von was immer für einer Seitenzahl zu beschreiben.

Auflösung.

Man theile den Kreis bei **a**, **b**, **c** ꝛc. (Fig. 86.) in so viel gleiche Theile, als das zu umschreibende Vieleck Seiten haben soll, verbinde den einen Theilpunkt **a** mit dem nächsten **b** durch die Sehne **ab**, und den Punkt **b** mit dem nächsten **c** durch **bc** ꝛc., fälle von **d** auf **ab** und **bc** die Lothe **de** und **df**, lege an den Punkt **b** eine Tangente **ef**, welche durch die gedachten Lothe in **e** und **f** begrenzt wird. Jetzt beschreibe man mit **de** oder **df** einen Kreis **efg** und lege von **e** und **f** die Tangenten **ha** und **cf** an den gegebenen Kreis (§. 29.), mache sie so lang, bis der äußere Kreis **egf** sie in **h** und **i** begrenzt. Von **h** und **i** lege man wiederum an den gegebenen Kreis Tangenten bis an den äußern Bogen **agf** und fahre auf diese Art so lange fort, bis das Polygon geschlossen ist.

§. 81.

Aufgabe.

Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Aus irgend einer Dreiecksspitze **b** (Fig. 87.) beschreibe man mit der Weite **bi**, welche größer als die Hälfte von **ab** seyn muß, einen Bogen und mit unveränderter Zirkelöffnung beschreibe man aus **a** und **c** zwei Bogen, die

---

*) Die Kreisbogen theilen, da wo sie die Peripherie schneiden, solche bei **l**, **m** u. s. f. in zwölf gleiche Theile (§. 69).

sich in d, e, ferner in f und g schneiden. Verbindet man diese Punkte durch die d e und f g, so erhält man den Durchschnittspunkt h, welcher das Centrum des mit a h um das Dreieck zu konstruirenden Dreiecks ist.

§. 82.

Aufgabe.

In ein Dreieck a b c (Fig. 88.) einen Kreis zu konstruiren.

Auflösung.

Aus b und c beschreibe man mit willkürlicher Zirkelöffnung die Bogen d e und g h und ebenfalls beschreibe man mit beliebiger Weite aus d und e, ferner aus g und h die Bogen d f, e f, g i und h i, wodurch die Punkte f und i erhalten werden, welche man mit den Spitzen b und c verbindet und diese Verbindungslinie b f und c i so weit verlängert, bis sie sich in k treffen; welches der Mittelpunkt des einzuschreibenden Kreises ist. Der Radius k l wird erhalten, wenn man k l auf a c lothrecht macht.

§. 83.

Die Auflösung der vorigen Aufgabe kann ganz kurz also ausgedrückt werden:

man halbire zwei Winkel des gegebenen Dreiecks: der Punkt, in welchem sich die Halbirungslinien schneiden, ist der Mittelpunkt und ein Loth von demselben auf irgend eine Dreiecksseite gefällt, gibt den Halbmesser des einzuschreibenden Kreises.

§. 84.

Aufgabe.

In einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich, folglich gleichwinklig mit demselben ist.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man einen Punkt e (Fig. 89.) an, lege durch denselben die Tangente f g und trage den Winkel b des gegebenen Dreiecks an e g in e, daß nämlich h e g = b werde. Ferner mache man i e f = a und verbinde dann h mit i durch die h i; es ist sodann △ e h i ∽ △ a b c, weil:

h = a,
hie = b und
hei = c ist.

§. 85.

Aufgabe.

In ein Quadrat einen Kreis zu zeichnen.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen **a c** und **b d** (Fig. 90.), beschreibe aus **b** und **c** mit **b c** zwei Bogen, welche sich in **f** schneiden, verbinde **f** mit **h** und beschreibe aus **h** mit **g h** den verlangten Kreis.

§. 86.

Aufgabe.

In ein reguläres Vieleck einen Kreis zu legen.

Auflösung.

Man nehme zwei Polygonwinkel **d a e** und **a e g** (Figur 70.), halbire sie und es ist dann der Durchschnittspunkt **c** dieser Halbirungslinie das Centrum des in das Polygon zu beschreibenden Kreises und das Loth **c i** von dem so eben gefundenen Mittelpunkte **c** auf eine Seite **a e** gefällt, ist der Halbmesser dieses Kreises.

§. 87.

Aufgabe.

Um ein gegebenes Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Man ziehe von einem Polygonwinkel etwa von **a** (Fig. 70.) nach dem Mittelpunkte **c** des Vielecks die gerade Linie **a c**, welche der Halbmesser des um das Polygon zu beschreibenden Kreises ist. Daß man das Centrum **c** durch das Halbiren zweier benachbarter Figurenwinkel **d a e** und **a e g** findet, ist bereits §. 86 gesagt worden.

§. 88.

Aufgabe.

Um ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat zu ziehen.

Auflösung.

Der Natur des Dreiecks und der des Quadrats wegen muß ein Winkel dieser Figur in eine Dreiecksspitze fallen; zwei Seiten des Quadrats aber nehmen die beiden übrigen Spitzen des Dreiecks auf.

Man beschreibe unter **a c** (Fig. 91.) einen Halbkreis und schlage mit **a c** die Bogen **a k** und **c k** aus **c** und **a**, welche sich in **k** schneiden; ziehe **b k**, beschreibe über **f g** mit **b d** den Halbkreis **f b g**, ziehe **h e** und **e i**, ferner **b f** und **b g**, und es ist dann **e h b i** das verlangte Quadrat.

§. 89.

Aufgabe.

Um ein gleichseitiges Dreieck **a b c** (Fig. 92.) ein reguläres Fünfeck dergestalt zu legen, daß zwei Dreiecksspitzen in die Seiten des Fünfecks fallen, die dritte Spitze aber in den Figurenwinkel des Fünfecks kommt.

Auflösung.

Man halbire **a b** in **d**, ziehe **c d**, nehme in **a d** den Punkt **e** beliebig an und beschreibe mit **a e** aus **a**, **b** und **c** drei Bogen. Den Bogen **l h** theile man in fünf gleiche Theile und mache **h o** = **n h**, vier solchen Theilen gleich. Ferner mache man den Bogen **k p** = **n o**, ziehe durch **b**, **p** und **c** und **o** gerade Linien **q r** und **c q**, welche sich in **q** schneiden. Nun mache man **q r** = **c q**, den Bogen **v g** = Bogen **o h**; ferner Bogen **s f** = Bogen **k p** und ziehe **c t** und **t u**, die **r u** aber mit **a b** parallel. Hierdurch erhält man das reguläre Fünfeck **c q r u t**, welches um das gleichseitige Dreieck **a b c** liegt.

§. 90.

Aufgabe.

Um ein gleichseitiges Dreieck ein reguläres Sechseck zu legen.

Erste Auflösung.

Mit **b c** (Fig. 93.) beschreibe man aus **a**, **b** und **c** vier Bogen, die sich in **d** und **f** schneiden; verbinde **b** und **d** durch **b d**; **a** mit **f** durch **a f**, mache aus **l** die **l h** = **g l** und beschreibe aus **g** mit **g h** einen Kreis, welcher die

Punkte i und k bestimmt, die dann mit den Dreiecksspitzen verbunden werden und wodurch, wenn man b h nebst c h zieht, das gesuchte Sechseck a k c h b i erzeugt wird.

Andere Auflösung.

Mit a b (Fig. 94.) beschreibe man aus b den Bogen a e d c und mit derselben Zirkelöffnung konstruire man aus a und c die Bogen b e und b d. Nun ziehe man durch a und d die a d und durch e und c die c e; ferner durch f und b die b g und beschreiben aus f mit c f einen Kreis, der die Punkte h, i und k bestimmt, wodurch, wenn man sie mit den Punkten a, b und c verbindet, das Sechseck a h c b i k um das gleichseitige Dreieck a b c gezeichnet ist.

§. 91.

Aufgabe.

Um ein Quadrat ein reguläres Fünfeck zu zeichnen.

Auflösung.

Man halbire c d (Fig. 95.) in e und a b in f; verlängere b c, bis b g = b f ist. Den Bogen f g theile man in fünf gleiche Theile und ziehe durch den zweiten Theilpunkt h und durch b eine gerade Linie, welche von der durch e und f gehenden Linie in i getroffen wird. Ferner beschreibe man mit c e aus c und d ein paar Bogen und mache den Bogen k n = f p, nämlich einem Fünftel des Bogens f g gleich, und eben so mache man o l = $\frac{1}{5}$ f g, ziehe durch c und n die c m, durch d und o die d s, durch a und i die i s und mache s r = m q = i m; es ist dann, wenn q r gezogen wird, m i s r q das reguläre Fünfeck um das gegebene Quadrat a b c d.

§. 92.

Aufgabe.

In ein Quadrat a b c d (Fig. 96.) ein reguläres Achteck zu zeichnen, so daß die Seiten dieser Figur in die des Quadrats fallen.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen a c und b d, beschreibe mit c e aus c, b, a und d Kreisbogen, wodurch die Punkte g, h, n, f, l, m, i und k bestimmt werden.

Verbindet man nun jegliche zwei Punkte, die in den Schenkeln der rechten Winkel liegen, durch gerade Linien, so ist **ghnflmik** das verlangte Achteck in dem gegebenen Quadrat.

§. 93.

Aufgabe.

In jedes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen.

Auflösung für das rechtwinklige Dreieck.

Am Ende **c** der Kathete **bc** (Fig. 97.) errichte man auf derselben das Loth **cd = bc** und ziehe **bd**. Macht man nun **fe # bc** und **eg # ab**, so ist **bgef** das verlangte Quadrat.

Auflösung für das stumpfwinklige Dreieck.

Am Ende **c** der Seite **bc** (Fig. 98.) wird das Loth **cd** auf derselben errichtet und so groß wie **bc** gemacht. Zieht man nun **bd** und macht man **ef # bc**, die **eg** und die **bf** aber lothrecht auf **bc**, so ist **bgef** das Quadrat im Dreieck **abc**.

Auflösung für das spitzwinklige Dreieck.

In eine Seite **ab** des Dreiecks **abc** (Fig. 99.) nehme man einen Punkt **d** willkürlich, fälle von **d** auf **ac** das Loth **de**, mache **dh # ac** und so groß wie **de** und fälle von **h** die **hf** auf **ac**, das heißt, man zeichne ein beliebig großes Quadrat **dhfe** in das Dreieck **abc**. Zieht man nun durch **a** und **h** die **ag**, macht man **ig # ac** und die **if**, so wie die **gh** lothrecht auf **ac**, so ist **ghki** das verlangte Quadrat im Dreieck **abc**.

§. 94.

Aufgabe.

In ein gleichseitiges Dreieck ein reguläres Fünfeck zu legen.

Auflösung.

Man mache **be = ab** (Fig. 100.) und auch normal auf **ab** in **b**; beschreibe aus **b** mit **ab** den Bogen **ae**, theile ihn in fünf gleiche Theile und mache **ef** einem solchen Theile gleich; ziehe **cf** und **bf**, halbire **ab** in **d**, beschreibe aus **b** mit **bd** den Bogen **dg**, ziehe durch **d** und **g** die **gh** und mache **bi = ah**. Aus **d** beschreibe

man mit dk den Bogen kl, aus l mit dl den Bogen dm und aus k mit dk den Bogen dn. Zieht man nun lm, mn und nk, so ist dlmnk das reguläre Fünfeck im gleichseitigen Dreieck abc.

§. 95.

Aufgabe.

In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu legen.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen ac und be (Fig. 101.), beschreibe aus d und e mit de zwei Bogen, welche sich in f und g schneiden. Nun verbinde man b mit f; ferner b mit g und man erhält die Durchschnittspunkte h und i. Verbindet man diese Punkte durch hi, so ist das gleichseitige Dreieck bhi das verlangte.

§. 96.

Aufgabe.

In ein reguläres Fünfeck ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Man halbire cd (Fig. 102.) in f, ziehe af, halbire sie in g, beschreibe aus a mit ag einen Bogen hi und konstruire aus g und i mit gi die Bogen gk und ik. Zieht man nun durch k die al, macht man am = ak, und zieht man mk und am, so ist akm das gleichseitige verlangte Dreieck.

§. 97.

Aufgabe.

In ein reguläres Sechseck ein gleichseitiges Dreieck zu legen.

Auflösung.

Wenn ahcibk (Fig. 94.) das Sechseck ist, in welches das gleichseitige Dreieck gelegt werden soll, so verbinde man den Scheitel des ersten und dritten, dann den des dritten und fünften und zuletzt den des fünften und ersten Polygonwinkels: man verbinde nämlich a mit c, c mit b und b mit a. Zieht man nun ac, bc und ab, so ist abc das verlangte Dreieck.

§. 98.

Aufgabe.

In ein reguläres Fünfeck ein Quadrat zu konstruiren.

Auflösung.

Man ziehe **b e** (Fig. 103.), mache darauf **b f** lothrecht in **b**; schlage aus **b** mit **b e** den Bogen **e f**, wodurch **b f = b e** wird; ziehe **a f**, mache **a h = a g**, ziehe **h g** (welches Linie # **c d** ist), errichte in **g** und **h** auf **g h** die Lothe **g k** und **h i**, so ist, wenn **i k** gezogen wird, **g h i k** das gesuchte Quadrat im Fünfeck.

§. 99.

Aufgabe.

Um ein Quadrat **a b c d** (Fig. 104.) ein Dreieck **i h k** zu legen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Auflösung.

An **a** auf **a b** trage man den Winkel **e** und an **b** den Winkel **g** des gegebenen Dreiecks; verlängere die Schenkel dieser so eben angelegten Winkel, bis sie sich zuvörderst in **h**, dann aber in der Verlängerung von **c d** in **i** und **k** schneiden. Das Dreieck **h i k** ist dann dem gegebenen Dreieck **e f g** ähnlich. Es ist nämlich:

i = e
k = g und
h = f.

Vierte Abtheilung.

Konstruction gleichseitiger und ungleichseitiger Dreiecke aus ihren Seiten, so wie der regulären Vielecke aus einer ihrer Seiten.

§. 100.

Aufgabe.

Ueber und unter eine gegebene gerade Linie **a b** (Fig. 105.) ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Auflösung.

Aus a und b beschreibe man mit ab zwei Kreisbogen, welche sich über der ab in c und unter der ab in d schneiden werden. Verbindet man nun c mit a und b durch gerade Linien, so ist abc das gleichseitige Dreieck über ab. Verbindet man indeß a mit d und b mit d ebenfalls durch gerade Linien, so ist abd das gleichseitige Dreieck unter ab.

§. 101.

Nicht nur beim vorigen §., sondern bei allen Konstructionen darf man nur die erforderlichen Kreisbogen so lang machen, als sie nöthig sind. Und dasselbe findet auch da statt, wo die Geometrie lehrt, um irgend etwas zu bezwecken, ganze Kreise zu schlagen; denn meistens bedarf es nur einzelner Kreisbogen, um irgend einen Durchschnittspunkt zu bestimmen.

§. 102.

Aufgabe.

Ueber einer geraden Linie ab (Fig. 106.), die zu lang ist, um in den Zirkel genommen werden zu können, ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Man nehme auf ab eine willkürliche Weite ad, trage sie von b nach e und beschreibe damit aus a, d, e und b vier Bogen, die sich in f und g schneiden. Zieht man nun durch a und f, dann durch b und g zwei gerade Linien ah und bh und macht man sie so lang, bis sie sich in h schneiden, so ist das Dreieck abh das verlangte gleichseitige.

§. 103.

Aufgabe.

Aus drei gegebenen Seiten, von denen jegliche zwei zusammengenommen größer als die dritte sind, ein Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Man mache df (Fig. 107.) so groß, wie eine der gegebenen Seiten, z. B. wie c; dann nehme man a in den Zirkel und beschreibe damit aus d den Bogen gh.

Ferner nehme man b in den Zirkel und schlage aus f den Bogen i k. Beide Bogen schneiden sich in einem Punkt e und es ist, wenn e d und e f gezogen wird, d e f ein Dreieck, in welchem

d f = c
d e = a und
e f = b ist.

§. 104.

Aufgabe.

Es sind drei Linien gegeben, von denen jegliche zwei zusammengenommen größer als die dritte sind; jede dieser Linien ist aber so lang, daß sie nicht mit dem Zirkel gefaßt werden kann. Man soll aber dennoch aus diesen Linien ein Dreieck bilden.

Auflösung.

Es sind a, b und c (Fig. 108.) die Linien, die ihrer Länge wegen nicht in den Zirkel genommen werden können. In diesem Falle schneidet man von jeder Seite einen aliquoten Theil, z. B. die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, oder allgemein: ein ntel ab. Es sey etwa m ein Drittel von a, n ein Drittel von b und o ein Drittel von c. Nun nehme man diese Theile und beschreibe mit ihnen ein Dreieck d f g, in welchem d f = o, d g = n und f g = m ist. Hierauf verlängere man die Seiten d f und d g unbestimmt, etwa bis i und k, und trage d f auf die d i so vielmal, als in wie viel Theile jede der gegebenen Linien a, b und c getheilt wurde; hier also die d f dreimal bis e und eben so trage man die d g dreimal bis h und ziehe h e, wodurch das Dreieck d e h erhalten wird, in welchem

d e = c
d h = b und
h e = a ist.

§. 105.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie e f (Fig. 109.) ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck a b c gleich und ähnlich ist.

Auflösung.

Auf eine gerade Linie **e f** trage man eine Seite, z. B. **a c** dergestalt, daß **h i = a c** werde und mache dann den Winkel **g h i = a** und den Winkel **g i h = c**; verlängert man nun die Schenkel dieser Winkel, bis sie sich in **g** treffen, so ist das Dreieck **g h i ≅ △ a b c**; es ist nämlich

h i = a c,
g h = a b und
g i = b c.

§. 106.

Mehrere Aufgaben, die geradlinigen Dreiecke betreffend, kommen in der zehnten Abtheilung vor, von §. 223 bis §. 243.

§. 107.

Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie ein Quadrat zu konstruiren.

Auflösung.

Mit **a b** (Fig. 110.) beschreibe man aus **a** und **b** zwei Bogen, welche sich in **c** schneiden. Mit demselben Halbmesser schlage man aus **c** und dann aus dem Durchschnittspunkte **d** einen Bogen, wodurch der Punkt **e** erhalten wird, aus welchem die Linie **a e** gezogen werden muß, um den Durchschnitt **f** zu erhalten. Aus **f** beschreibe man mit dem anfänglich genommenen Radius einen Bogen **a g h**, dann mit derselben Zirkelöffnung aus **b** einen Bogen **a c g**, wodurch der Bogen **a g h** in **g** geschnitten wird und ziehe dann **f g** und **b g**, wodurch das Quadrat **a b g f** erhalten wird.

§. 108.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen geraden Linien ein Rechteck zu konstruiren.

Auflösung.

Wenn die gegebenen Linien **a b** und **c d** (Fig. 111.) sind, so nehme man die eine **a b** derselben und trage sie von **e** nach **f**, errichte in **e** und **f** Lothe, welche **= c d** gemacht werden und ziehe **g h**: die hierdurch entstan-

dene vierseitige Figur e f g h ist das verlangte Rechteck, in welchem

e f = a b und
e g = c d ist.

§. 109.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Linie a b (Fig. 112.) und aus einem Winkel c eine Raute (Rhombus) zu zeichnen.

Auflösung.

Man mache die eine Linie d e = a b und trage an d in der Linie d e einen Winkel h d e, der dem gegebenen Winkel c gleich ist. Mit d e beschreibe man aus d einen Bogen, der den Schenkel d h des Winkels h d e in f schneidet. Macht man nun e g # d f und auch eben so groß als d f und zieht man f g, so ist d e g f die verlangte Raute.

§. 110.

Aufgabe.

Es sind zwei Linien a b und c d (Fig. 113.) nebst einem Winkel e gegeben, man soll daraus eine längliche Raute (Rhomboides) konstruiren.

Auflösung.

Die Linie f g mache man so groß, wie a b und trage in den Punkt f an die f g den Winkel e, so daß h f g = e werde. Macht man nun f i = c d und g k # und = i f und zieht man i k, so ist f g k i die verlangte längliche Raute.

§. 111.

Aufgabe.

Aus vier gegebenen Linien a b, c d, e f und g h (Fig. 114.) nebst einem Winkel i ein Trapez zu zeichnen, welches den gegebenen Winkel enthält.

Auflösung.

Man mache k l = g h, den Winkel l = i und dessen Schenkel l m = c d. Aus k beschreibe man mit a b einen Bogen und aus m ebenfalls einen Bogen mit e f;

man erhält dadurch den Punkt **n**, welcher mit **k** und **m** durch eine gerade Linie verbunden wird, wodurch das Trapez **k l m n** entsteht.

§. 112.

Aufgabe.

Auf eine gegebene begrenzte gerade Linie ein reguläres Fünfeck zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Man verlängere die gegebene Linie **a b** (Fig. 115.), beschreibe aus **b** mit **a b** den Halbkreis **a e c**, ferner aus **a** und **c** mit **a c** die Bogen **a d** und **c d**; ziehe **d e**; beschreibe mit **a b** aus **a** den Bogen **m b l i**, ziehe **l m**, ferner **e f** und mache **f g = e f**. Mit **a g** schlage man aus **a** und **b** zwei Bogen, welche sich in **h** schneiden und mit **a b** beschreibe man aus **h** einen Bogen, welcher die Durchschnittspunkte **i** und **k** gibt. Verbindet man endlich **a** mit **i**, **i** mit **h**, **h** mit **k** und **k** mit **b**, so ist das Fünfeck konstruirt.

Andere Auflösung.

In **a** auf der gegebenen **a b** (Fig. 116.) errichte man das Loth **a c = a b**, beschreibe aus **a** mit **a b** den Bogen **b d**, theile den Bogen **b c** in fünf gleiche Theile, mache **c d** einem solchen Theile gleich und ziehe **a d**. Nun beschreibe man aus **b** mit **a b** einen Bogen **a e**, welchen man dem Bogen **b d** gleich macht und ziehe **b e**. Werden nun mit **a b** aus **d** und **e** zwei Bogen geschlagen, so geben sie den Durchschnittspunkt **f**, aus welchem man endlich an **d** und **e** die **d f** und die **e f** zieht; **a b e f d** ist dann das reguläre Fünfeck über **a b**.

§. 113.

Die zweite Auflösung des vorigen §. gehört zu den Konstructionen, bei welchen ein Versuchen angewendet werden muß und sie ist deshalb, wenn man nicht etwa §. 19 anwenden will, keine reine Konstruction zu nennen, obschon sie in vielen Fällen anwendbar ist.

Uebrigens ist es allemal vortheilhaft, daß man, wenn drei Seiten des Polygons gefunden sind, dessen Mittelpunkt sucht und daraus um die bereits bestimmten Vieleckswinkel einen Kreis schlägt: es lassen sich dann die Sei-

ten des Vielecks leichter einschreiben; auch werden die auf diese Art gebildeten Figuren allemal richtiger, als wenn man anders zu Werke geht.

§. 114.

Aufgabe.

Auf die begrenzte gerade Linie **a b** (Figur 117.) ein reguläres Sechseck zu konstruiren.

Auflösung.

Mit **a b** beschreibe man aus **a** und **b** zwei Bogen, welche sich in **c** schneiden. Zieht man nun **b c** und beschreibt man damit, oder was einerlei ist, mit der anfänglich genommenen Zirkelöffnung einen Kreis **a g f e d b**, so kann man in diesem die Linie **a b** genau sechsmal als Sehne herumtragen und **a b d e f g** ist das verlangte Sechseck.

§. 115.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ein reguläres Siebeneck zu konstruiren.

Auflösung.

Man verlängere **a b**, bis **b c = a b** (Fig. 118.) wird, beschreibe mit **a c** aus **a** und **c** zwei Bogen **c d** und **a d e**, ferner mit derselben Zirkelstellung aus **d** den Bogen **c e**. Nun ziehe man **b d** und **a e**, nehme **a f** in den Zirkel und schlage damit aus **a** und **b** zwei Bogen, wodurch der Punkt **g** erhalten wird. Beschreibt man nun um **g** mit **a g** einen Kreis, so kann man in denselben die gegebene Seite **a b** noch sechsmal als Sehne oder als Polygonseite herumtragen und **a b m l k i h** ist das verlangte Siebeneck.

§. 116.

Aufgabe.

Auf die Linie **a b** (Fig. 119.) ein reguläres Achteck zu stellen.

Auflösung.

Man halbire **a b** in **c**, mache **c e** normal auf **a b** in **c**, ferner **c d = b c**, ziehe **b d** und beschreibe damit aus **d** den Bogen **b e**, wodurch der Punkt **e** in der Verlängerung von **c d** bestimmt wird. Zieht man nun **a e**, so

ist dies der Halbmesser eines aus c zu beschreibenden Kreises, in welchem ab achtmal als Sehne herumgetragen werden kann und wodurch abfghikl das verlangte Achteck wird.

§. 117.

Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie ab (Fig. 120.) ein reguläres Neuneck zu zeichnen.

Auflösung.

Aus a und b beschreibe man mit ab die Bogen cbd und cad und ziehe durch c und d die df. Trägt man nun ab von c nach f, so ist f der Mittelpunkt und af der Halbmesser eines Kreises, in welchem ab neunmal als Sehne herumgetragen werden kann: abghiklmn ist dann das reguläre Neuneck auf ab.

§. 118.

Aufgabe.

Auf eine gerade begrenzte Linie ab (Figur 121.) ein reguläres Zehneck zu konstruiren.

Auflösung.

Man verlängere die gegebene Seite ab, bis bc = ab wird, beschreibe über ac den Halbkreis adc, errichte in b auf ab das Loth bd, halbire ab in e, ziehe de und mache ef = de. Beschreibt man nun mit af aus a und b zwei Bogen, so erhält man in deren Durchschnittspunkte g den Mittelpunkt, und wenn man ag zieht, den Halbmesser desjenigen Kreises, in welchen ab zehnmal als Sehne herumgetragen werden kann und abhiklmnop ist das gesuchte Zehneck.

§. 119.

Aufgabe.

Mittels des Transporteurs auf jede gegebene Seite eines Polygons das Polygon selbst zu konstruiren.

Auflösung.

Man theile die Zahl 180 durch diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel Seiten das Polygon hat, dessen Seite gegeben ist; also bei einem nseitigen Vielecke durch n. Den

Quotient $\frac{108}{n}$ merke man und trage an den einen Endpunkt der gegebenen Seite **a b**, etwa an **a** (Fig. 122.), mit dem Transporteur einen Winkel **c a b** $= \alpha$, der $\frac{180}{n}$ Grade enthält. Nun lege man an **a c** den Winkel **c a d** $= \alpha$ und fahre auf diese Art fort, bis man $n - 2$ Winkel von **a** an in **a b** aufgetragen hat. Ist dies geschehen, so mache man **b c** = **a b** und ziehe **b c**; ferner mache man **c d** = **b c**, ziehe **c d** und setze dies Verfahren so lange fort, bis man die Seite **a f**, welche an den Punkt **a** der Linie **a b** fällt, gezogen hat, wodurch denn das verlangte Vieleck konstruirt ist.

Hätte man z. B. über die Seite **a b** ein Sechseck zu zeichnen, so sage man:

180 getheilt durch 6 (nämlich $\frac{180}{6}$) gibt 30.

So viel Grade, als dieser Quotient Einheiten hat, trage man nun mit dem Transporteur an **a** auf die **a b**, wodurch α = **c a b** = 30° wird. Da nun $6 - 2 = 4$ ist, so müssen an **a b** und zwar an **a** noch **vier** Winkel, jeder $= \alpha = 30°$ gelegt werden und man mache daher noch, weil schon ein Winkel **c a b** = 30° an die **a b** gelegt ist, **d a c** = **e a d** = **e a f** = α = 30°. Wird nun aus **b** mit **a b** der Bogen **a c** beschrieben, so ist **b c** gefunden und man erhält auf ähnliche Art die **c d**, **d e**, **e f** und **a f**; folglich auch das verlangte Sechseck.

§. 120.

Die vorige Aufgabe kann auch auf folgende Art gelöst werden: man bestimme einen Polygonwinkel **f a b** (Fig. 122.) aus der Formel

$$\mathbf{fab} = \frac{2\,n\,R - 4\,R}{n}$$

worin **n** die Anzahl Seiten bedeutet, welche das Vieleck erhalten soll und trage ihn mittels des Transporteurs dergestalt an die **a b** in **a**, daß **f a b** die durch die Formel gefundene Anzahl Grade enthält. Nun beschreibe man aus **a** mit **a b** einen Bogen **b f** und theile ihn in $n - 2$ gleiche Theile bei **g**, **h** ꝛc. Zieht man nun durch diese Theilpunkte die Linien **a c**, **a d** ꝛc. und konstruirt man

übrigens, wie §. 119 gezeigt wurde, so ist das verlangte Polygon erhalten.

Wollte man, wie im vorigen §. geschehen, ein Sechseck auf die Seite **ab** setzen, so ist

$$\mathbf{fab} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 90^\circ - 4 \cdot 90^\circ}{6} \text{ das ist:}$$

$$\mathbf{fab} = 120^\circ.$$

Nun mache man **fab** $= 120^\circ$ und beschreibe aus **a** mit **ab** den Bogen **fihgb**. Weil ferner $6 - 2 = 4$ ist, so muß der Bogen **fhgb** in vier gleiche Theile bei **g**, **h** und **i** getheilt werden, durch welche Punkte dann die Linien **ac**, **ad** und **ae** zu ziehen und wie §. 119 gewiesen wurde, die Seiten **af**, **ef**, **de**, **dc** und **bc** zu bestimmen sind.

§. 121.

Aufgabe.

Es ist die Seite **ab** (Fig. 123.) eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Eilf- und Zwölfecks gegeben; man soll durch eine einzige Konstruction die Mittelpunkte solcher Kreise finden, in denen die gegebene Seite **ab** die Seite eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Eilf- und Zwölfecks ist; das heißt, in welchen Kreisen die gegebene Seite sechs-, sieben-, acht-, neun-, zehn-, eilf- und zwölfmal als Sehne herumgetragen werden kann.

Auflösung.

Mit **ab** beschreibe man aus **a** und **b** die Bogen **ad** und **bd**, welche sich in **d** schneiden; halbire **ab** in **c** und ziehe durch **c** und **g** die **cq**. Den Bogen **ad** theile man durch Versuche oder nach §. 19 in sechs gleiche Theile und beschreibe aus **d** mit **d 5**, dann mit **d 4**, ferner mit **d 3** und so fort mit **d 2**, **d 1** und **ad** Bogen, welche den Perpendikel **cq** in **e**, **f**, **g**, **h**, **i** und **k** treffen. Die Punkte **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i** und **k** sind nun die verlangten Mittelpunkte, und zwar ist

d der Mittelpunkt für das Sechseck,
e " " " Siebeneck,
f " " " Achteck,
g " " " Neuneck,

h der Mittelpunkt für das Zehneck,
i = = = = Eilfeck und
k = = = = Zwölfeck.

Zieht man nun b d, b e, b f, b g, b h, b i und b k, so ist

b d der Halbmesser des Kreises für und um das Sechseck,
b e = = = = = = = = Siebeneck,
b f = = = = = = = = Achteck,
b g = = = = = = = = Neuneck,
b h = = = = = = = = Zehneck,
b i = = = = = = = = Eilfeck und
b k = = = = = = = = Zwölfeck.

§. 122.

Aufgabe.

Durch eine einzige Konstruction die Mittelpunkte solcher Kreise zu finden, in denen eine gegebene Linie a b (Fig. 124.) die Seite eines regulären Dreizehn=, Vierzehn=, Funfzehn=, Sechszehn=, Siebenzehn=, Achtzehn=, Neunzehn=, Zwanzig=, Einundzwanzig=, Zweiundzwanzig=, Dreiundzwanzig= und Vierundzwanzigecks ist.

Auflösung.

Man halbire die Seite a b in d, beschreibe mit a b aus a und b die Bogen b c und a c, ziehe durch d und c die d γ, theile den Bogen a c in zwölf gleiche Theile und beschreibe aus c mit c 11, dann mit c 10, c 9, c 8, c 7, c 6, c 5, c 4, c 3, c 2 und a c Bogen bis an δ γ, wodurch die Punkte e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p und q erhalten werden. Von diesen Punkten ziehe man die geraden Linien b c, b e, b f, b g, b h, b i, b k, b l, b m, b n, b o, b p und b q an b *): es sind dies die Halbmesser, mit welchen man aus den Punkten e, f, g, h ꝛc. Kreise beschreibt, welche das Loth d γ in den Punkten r, s, t, u, v, w, x, y, z, α, β und γ treffen und wel=

*) Es ist an der Figur nur die erste und die letzte dieser Linien gezogen worden, weil die übrigen zu nahe an einander fallen und dadurch Undeutlichkeit erzeugen würden. Dasselbe findet bei den Linien q a, r a, s a ꝛc. . . statt, von denen hier nur die r a und γ a gezogen ist.

ches die Mittelpunkte der verlangten Kreise sind. Es ist nämlich

der Mittelpunkt	der Radius		zum Kreise
q	qa	für das	Zwölfeck,
r	ra	= =	Dreizehneck,
s	sa	= =	Vierzehneck,
t	ta	= =	Fünfzehneck,
u	ua	= =	Sechszehneck,
v	va	= =	Siebenzehneck,
w	wa	= =	Achtzehneck,
x	xa	= =	Neunzehneck,
y	ya	= =	Zwanzigeck,
z	za	= =	Einundzwanzigeck,
α	αa	= =	Zweiundzwanzigeck
β	βα	= =	Dreiundzwanzigeck,
γ	γα	= =	Vierundzwanzigeck.

Fünfte Abtheilung.

Konstruction der gedrückten Kreise oder der sogenannten Ovale durch Kreisbogen, durch Vergatterung und durch andere Hilfsmittel.

§. 123.

Aufgabe.

Einen gedrückten Kreis, ein sogenanntes Oval zu konstruiren, wenn dessen Länge (große Achse) **ab** (Fig. 125.) bestimmt ist.

Erste Auflösung.

Man theile die gegebene Achse **ab** bei **c** und **d** in drei gleiche Theile, beschreibe aus **c** und **d** mit **ac** zwei Kreise, welche sich in **e** und **f** schneiden. Nun ziehe man **ei**, **ek**, **fg** und **fh** und beschreibe aus **e** und **f** mit **fg** die Bogen **gh** und **ik**; wodurch man die verlangte Figur erhält.

Zweite Auflösung.

Man theile die Achse **ab** (Fig. 126.) bei **c**, **d** und **e** in vier gleiche Theile; beschreibe aus **e** und **c** mit **ae** zwei Kreise, ferner mit **ce** aus **c** und **e** die Kreisbogen **feg** und **fcg** und ziehe durch **f** und **e**, durch **f** und **c**, durch

g und e und durch g und c die geraden Linien gh, gi, fk, fl. Beschreibt man nun aus f und g mit fk die Bogen kl und hi, so ist das Oval konstruirt.

Dritte Auflösung.

Auf ab (Fig. 127.) nehme man ac = bd beliebig und beschreibe damit aus c und d Kreise. Aus c und d schlage man mit cd zwei Bogen und verbinde deren Durchschnittspunkte e und f mit c und d durch die Linien ek, ei, fg und fh. Konstruirt man nun aus e und f mit ek die Bogen ik und gh, so ist die Figur beendet *).

Vierte Auflösung.

Man theile die ab (Fig. 128.) bei c, d und e in vier gleiche Theile; beschreibe mit ae aus c, d und e Kreise; ferner konstruire man mit ce aus c und e Kreisbogen, deren Durchschnittspunkte h und i durch die Linie hi verbunden werden. Nun ziehe man mg, fk, gl und fn und schlage aus g den Bogen ml; ferner aus f den Bogen kn, wodurch der gedrückte Kreis beendet ist.

Fünfte Auflösung.

Die gegebene Breite ab (Fig. 166.) theile man in vier Theile, mache ac, so wie bd einem solchen Theile gleich, beschreibe mit cd aus c und aus d zwei Kreisbogen de und ce, welche sich in e schneiden. Zieht man nun durch c und e die eh, ferner durch d und e die ei, so ist, wenn man mit ac aus c und d die Bogen af und bg, ferner aus e mit ef den Bogen fg beschreibt, afgb der gedrückte Bogen.

Sechste Auflösung.

Man theile ab (Fig. 133.) in fünf gleiche Theile, setze einen solchen Theil sowohl von d nach e, als auch von d nach f. Nun verlängere man cd, bis $dg = \frac{1}{5}$ ab ist und ziehe durch g und e die gh und durch f und g die gi. Beschreibt man nun mit ae aus e und f die Bogen ah und bi, so wie aus g mit gh den Bogen hci, so ist der gedrückte Bogen konstruirt.

---

*) Wird ac oder bd sehr kurz abgenommen, so kann man einen sehr flachen gedrückten Bogen erhalten.

§. 124.

Aufgabe.

Nach einer gegebenen Länge **ab** und Breite **cd** (Fig. 129a) ein Oval zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Man bringe die Länge und Breite in ihrem Halbirungspunkt **e** rechtwinklig an einander, trage **de** von **a** nach **f**, theile **ef** in drei gleiche Theile und setze einen solchen Theil **fg** von **f** nach **h**. Macht man nun **ei = eh** und beschreibt man mit **hi** aus **h** und **i** die Bogen **lhk** und **lik**, so sind **k** und **l**, ferner **h** und **i** die Mittelpunkte, aus denen das Oval gezeichnet wird. Man ziehe nun durch **k** und **h**, ferner durch **k** und **i**, dann durch **l** und **h** und endlich durch **l** und **i** gerade Linien und beschreibe aus **l** mit **dl** den Bogen **mdn**, aus **k** mit derselben Weite den Bogen **pco**, aus **h** mit **mh** den Bogen **map** und endlich aus **i** mit **bi** den Bogen **nbo**.

Diese Konstruction ist den Zeichnern die vortheilhafteste und daher wohl auch die üblichste.

Zweite Auflösung *).

In die Mitte **d** (Fig. 130a) der gegebenen Breite **ab** setze man die gegebene Höhe **cd** lothrecht, ziehe **ac**, trage **cd** von **a** nach **e** und mache **cf = de**. Nun theile man **af** bei **g** in die Hälfte und errichte in **g** auf **ac** ein Loth **lh**, welches so weit verlängert wird, bis die Verlängerung der Höhe **cd** in **h** geschnitten wird. Ferner trage man **di** von **d** nach **k**, ziehe **hm**, beschreibe aus **i** und **k** mit **ai** die Bogen **al** und **bm** und aus **h** mit **ch** den Bogen **lcm**; wodurch der halbe gedrückte Bogen konstruirt ist.

Dritte Auflösung.

Nachdem die Höhe **cd** (Fig. 129b) in die Mitte **c** der Breite **ab** gebracht worden, so ziehe man **de # ac** und **ae # cd**. Ferner ziehe man **ad** und beschreibe mit **de** den Bogen **ef** und mit **ae** den Bogen **eg**. Beide

---

*) Von nun an werden nur halbe gedrückte Bogen hier konstruirt werden, weil man in den meisten Fällen nur solcher Bogen bedarf. Die Breite wird daher nur halb gegeben und „Höhe“ genannt werden.

Bogen halbire man und zwar den Bogen **ef** in **k** und den Bogen **eg** in **h** und ziehe durch die Halbirungspunkte, so wie durch **a** und **d** die Linien **ai** und **ld**, welche sich in **m** schneiden. Von diesem Punkte **m** fälle man auf **ad** ein Loth **mf**, verlängere es, bis dadurch die Verlängerung der Höhe **cd** in **n** getroffen wird, mache **cp = co** und ziehe durch **n** und **p** die **nq**. Um nun den gedrückten Bogen zu konstruiren, so beschreibe man aus **n** mit **dn** einen, und mit **ao** oder **bp** aus **o** und **p** zwei Bogen.

Vierte Auflösung.

Auf **ad** (Fig. 130b) nehme man einen beliebigen Punkt **e**, mache **cf = ae**, ziehe **ef**, halbire **ef** in **g**, mache **gh** normal auf **ef**, verlängere **cd**, bis **gh** in **h** geschnitten wird und trage **de** von **d** nach **i**. Zieht man nun **bk** durch **e** und **h** und **hl** durch **h** und **i**, beschreibt man ferner aus **e** und **i** mit **ae** die Bogen **ak** und **bl** und aus **h** mit **ch** den Bogen **ck**, so ist **akchb** der gedrückte Bogen.

Fünfte Auflösung.

Man mache **ce = ac** (Fig. 131.), theile **de** in drei gleiche Theile, trage einen dieser Theile von **d** nach **f**, nehme **cf** in den Zirkel, beschreibe aus **a** den Bogen **gh** und aus **b** den Bogen **ki**; ferner aus **g** den Bogen **ah** und aus **k** den Bogen **bi**. Mit **hi** schlage man aus **h** und **i** zwei Bogen, welche sich in **l** schneiden und aus **l** konstruire man mit **dl** den Bogen **hdi**.

Sechste Auflösung.

Aus **d** mit **cd**, dann aus **a** mit **ac** (Fig. 132.) beschreibe man Kreise, ziehe **ad** und beschreibe mit **ef** aus **a** und **b** die Bogen **gh** und **ik**; ferner aus **g** und **k** die Bogen **ah** und **bi**. Zieht man nun durch **h** und **g**, so wie durch **k** und **i** gerade Linien, so schneiden diese sich in **l**, woraus denn mit **hl** der Bogen **hdi** geschlagen und der gedrückte Bogen **ahdib** vollendet wird.

Siebente Auflösung.

Man ziehe eine Linie **fg = ab** (Fig. 134.), mache darauf **fh = 2cd = ce**, trage **hg** von **d** nach **k** und von **d** nach **i**, theile **dk** in drei gleiche Theile, nehme **do**, nämlich zwei solcher Theile und trage sie von **d** nach **l**,

ziehe lm durch l und k, ln durch l und i und beschreibe mit ak aus k und i die Bogen am und bn; den Bogen mcn aber schlage man aus l mit cl.

Achte Auflösung.

Man mache af (Fig. 135.) = 2cd = ce und dg = bf, ferner dh = dg, theile dg in vier gleiche Theile und nehme drei solcher Theile von d nach i. Hiernach sind g, h und i die Mittelpunkte, aus denen der gedrückte Bogen beschrieben wird; denn, wenn man durch e und g die ek und durch c und h die il gezogen hat, so wird der Bogen ak aus g mit ag, der Bogen bl aus h mit bh und der Bogen kcl aus i mit ic konstruirt.

Neunte Auflösung.

Auf den Achsen ab und cd (Fig. 136.) nehme man die willkürlichen, einander gleichen Entfernungen af, ch, bg und di an; ziehe fh und gi, halbire jene Linie in k und diese in m, errichte in diesen Halbirungspunkten auf fh und gi die Lothe kl und mn, wodurch die Punkte l und n bestimmt werden, welche nebst f und g die Mittelpunkte zu den vier Bogen sind, woraus der gedrückte Kreis besteht. Zieht man nun die lp, nr, no und lq, so ist, wenn Bogen rap aus f mit af, Bogen obq aus g mit bg, Bogen pcq aus l mit lc und Bogen rdo mit dn aus n beschrieben wird, das Oval konstruirt.

Zehnte Auflösung.

Auf der gegebenen Höhe ef (Fig. 137.) nehme man einen beliebigen Punkt g an und mache ac = bd = eg. Aus c, e und d beschreibe man mit eg Kreise, ziehe cg und dg, halbire diese Linien in h und i, errichte in diesen Halbirungspunkten auf den Linien cg und dg die Lothe hk und ik, welche sich in k schneiden. Durch k und c ziehe man die Linie km und durch k und d die kl, setze in k ein und beschreibe mit km den Bogen ml, wodurch amelb der gesuchte gedrückte Bogen wird *).

Eilfte Auflösung.

Man mache ce = ad (Fig. 138.) und beschreibe aus c mit ce den Bogen ef. Zwischen d und e nehme

*) Diese Auflösung ist der vierten gleich.

man g willkürlich und beschreibe mit b g aus e und f zwei Bogen, welche sich in h schneiden und die Punkte i und k bestimmen. Zieht man nun durch h und i die h l und durch h und k die h m, so ist, wenn aus i mit a i der Bogen a l, aus k mit a i der Bogen b m und aus h mit c h der Bogen l c m beschrieben wird, der gedrückte Bogen konstruirt.

Zwölfte Auflösung.

Die gegebene Höhe setze man normal in den Halbirungspunkt l auf a b (Fig. 165.), mache d l = c l, halbire a d und trage eine solche Hälfte dreimal von l nach f und von l nach g, so daß $l f = l g = 3 \cdot \frac{a d}{2}$ wird. Ferner mache man $l h = 4 \cdot \frac{a d}{2}$ und ziehe durch f und h, wie auch durch g und h gerade Linien. Beschreibt man nun aus h mit c h den Bogen i c k und aus f mit a f den Bogen a i, so wie aus g und b g den Bogen b k, so ist der gedrückte Bogen konstruirt.

§. 125.

Aufgabe.

Aus fünf Punkten einen gedrückten Bogen zu einer bestimmten Weite a b (Fig. 139.) zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Man theile die gegebene Breite a b in zweiundzwanzig gleiche Theile und gebe die Höhe c d sieben solcher Theile. Jetzt nehme man $7\frac{1}{2}$ Theile und trage sie von c nach e in die Verlängerung der c d; nehme 8 Theile in den Zirkel, beschreibe damit aus d zwei Bogen f g und h i, setze in e ein und schlage mit d e den Bogen k d l und ziehe k e und l e. Ferner mache man k q = l r = 10 Theilen, beschreibe aus k und l mit $4\frac{1}{2}$ Theilen die Bogen m s n und o t p; aus q aber schlage man mit q k den Bogen k s und aus r mit l r den Bogen l t und ziehe s q, wie auch t r. Setzt man nun im Durchschnittspunkt u ein und beschreibt man daraus mit u s den Bogen a s, ferner aus v mit t v den Bogen b t, so ist a s k d l t b der aus den fünf Mittelpunkten a, g, e, r und v beschriebene gedrückte Bogen.

Andere Auflösung.

Man theile die halbe Weite **a b** (Fig. 140.) in dreizehn gleiche Theile, errichte in **a** auf **a b** ein Loth **a c** und verlängere es etwa bis **m**. Auf die **a m** trage man vier einander gleiche Theile **a g**, **f g**, **e f** und **d e** von beliebiger Größe, die doch aber so groß seyn müssen, daß jeder Theil mindestens zweimal so groß, als ein Theil von **a b** ist und ziehe durch **d** und 4, durch **e** und 7, durch **f** und 9 und durch **g** und 10 gerade Linien, welche sich in **k**, **l** und **h** schneiden. Die Punkte **d**, **k**, **l**, **h** und **i** sind nun die Mittelpunkte, aus denen der gedrückte Bogen gezeichnet wird; und zwar beschreibt man aus **i** mit 3 Theilen, das ist mit **i b** den Bogen **A**, aus **h** den Bogen **B**, aus **l** den Bogen **C**, aus **k** den Bogen **D** und aus **d** den Bogen **E**. Auf der andern dem Bogen **c E D C B A b** entgegengesetzten Seite **F** verfährt man ebenso.

§. 126.

Aufgabe.

Gedrückte Bogen aus so vielen Mittelpunkten, als man nur will, zu jeder bestimmten Weite und Höhe zu konstruiren.

Auflösung.

Es sey **a b** = **B** (Fig. 141.) die halbe Breite, **a c** = **H** aber die ganze Höhe, so mache man mit Hilfe eines Maasstabs, nach welchem man die Figur aufträgt, **a d** = (**B** — **H**) 1,249 .... *). Diese Weite trage man von **a** viermal auf die Verlängerung der **a c**, so daß **a e** = 4 **a d** wird. Nun ziehe man von der Zahl, welche anzeigt, aus wie viel Mittelpunkten der Bogen beschrieben werden soll und welche stets eine ungerade Zahl seyn muß, 1 ab und theile den Rest durch 2. In so viel gleiche Theile, als hier der Quotient Einheiten hat, theile man nun die **a e**. Will man z. B. den Bogen aus 11 Punkten konstruiren, so sage man 11 — 1 = 10 und

$$\frac{10}{2} = 5,$$

weshalb **a e** bei **f**, **g**, **h** und **i** in fünf gleiche Theile getheilt wird. Jetzt nehme man den Quotient 5 und ziehe

---

*) Das heißt, man ziehe von der halben Breite die Höhe **a c** und multiplicire den Unterschied mit 1,249. ...

von ihm 1 ab, von dem Reste wiederum 1 und setze dies Abziehen so lange fort, bis man 1 zum Rest erhält. Dann addire man die Zahlen 5, 4, 3, 2 und 1, wodurch man hier 15 erhält, und theile die a d in 15 gleiche Theile.

Zieht man nun durch den fünften Theil n und durch e die e s, dann durch m, das ist durch den vierten Theil von n an und durch i die i t, ferner durch den dritten Theil l von m an und durch h die h u; dann durch den zweiten Theil k von l an und durch g die g v und endlich durch den nächsten Theil d und durch f die f w, so sind e, o, p, q, r und d die Mittelpunkte, aus denen die einzelnen Bogen beschrieben werden. Man konstruire nämlich aus d mit b d den Bogen b w, aus r den Bogen v w, aus q den u v, aus p den t u, aus o den s t und aus e den Bogen c s.

§. 127.

Bei sehr weiten Bogen, wie z. B. bei denen der Brücken, pflegt man gern die krumme Linie aus vielen Mittelpunkten zu beschreiben und es ist daher die Konstruction der vorigen §§. dem Baumeister von vielem Nutzen.

§. 128.

Die gedrückten Bogen, welche der Techniker in der Ausübung bedarf, werden meistens durch die sogenannte

Vergatterung,

die §. 129 bis §. 136 gezeigt wird, gebildet.

Alle diese Bogen sind wirkliche Ellipsen, welche entweder mittels einer Schnur, oder durch den sogenannten Ellipsenzirkel (Ellipsograph), dessen Beschreibung und Gebrauch §. 155 enthält, konstruirt werden können.

§. 129.

Aufgabe.

Nach einem Halbkreis einen gedrückten Bogen, von derselben Höhe, auf eine beliebige Weise zu konstruiren; oder, nach der Sprache der Techniker, einen vollen Zirkel zu vergattern.

Auflösung.

Man theile den Durchmesser a b (Fig. 142a) des gegebenen Halbkreises (der von den Bauprofessionisten „vol-

ler Zirkel" genannt wird) in eine beliebige Anzahl, z. B. in acht gleiche Theile bei **e**, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 und errichte in diesen Theilpunkten auf **a b** Lothe, die bis an die Peripherie des Halbkreises gehen. Nun theile man die gegebene Weite **c d** ebenfalls in acht gleiche Theile und errichte in diesen Theilpunkten ebenfalls Lothe auf **c d** und mache den ersten Perpendikel

1 l = **e f**; den zweiten Perpendikel
2 m = 2.2; ferner
3 n = 3.3,
4 o = 4.4,
p 5 = 5.5 = 33,
6 q = 6.6 = 22,
7 r = 7.7 = **e f**.

Werden nun die Punkte **c**, **l**, **m**, **n**, **o**, **p**, **q**, **r** und **d** durch eine Linie verbunden, so ist die sogenannte Vergatterung vollzogen.

§. 130.

Den ersten Theil **a e** (Fig. 142a), so wie den letzten **7 b**, pflegt man gern noch besonders in einige, z. B. in drei gleiche Theile zu theilen, in den Theilpunkten Lothe **g i**, **h k** ꝛc. zu errichten, dieselbe Eintheilung bei **c** 1 und **d** 7 vorzunehmen, auch hier Normalen **u s**, **t v** ꝛc. zu konstruiren und wie §. 129 gezeigt wurde, die Höhen zu bestimmen.

§. 131.

In je mehr Theile man die **a b** (Fig. 142a) theilt, desto richtiger erhält man die krumme Linie, die man am sichersten mit einem sogenannten Schwungholze (krummlinigen Lineale), welches Fig. 142b abgebildet ist, zeichnen kann, indem sie mit einzelnen Kreisbogen nicht zu konstruiren ist. Das erwähnte Schwungholz, an welchem mehrere kleine und größere Krümmungen vorkommen, kann von festem trocknen Holze, wozu sich am besten Birnbaumholz eignet, von Metall oder auch von Horn gefertigt seyn.

Man bedient sich dieses Werkzeugs allemal mit Vortheil beim Zeichnen aller solcher krummen Linien, die nicht mit dem Zirkel beschrieben werden können.

§. 132.

Aufgabe.

Einen Halbkreis **a h b** (Fig. 143.) dergestalt zu vergattern, daß der zu konstruirende Bogen eine gegebene Höhe **e f** erhalte.

Auflösung.

Man errichte in der Mitte der Linie **a b** das Loth **g h**, theile es bei 1, 2, 3 ꝛc. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in vier; ebenfalls theile man die Linie **e f** bei **p**, **q**, **r** ꝛc. in vier gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit **c d**. Macht man nun

r 3 = i 3
q 2 = k 2 und
p 1 = l 1; so ist, wenn die Punkte **c**, 3, 2, 1 und **f** durch eine krumme Linie verbunden werden, die Vergatterung vollzogen. Den ersten Theil **h 1** oder **f p** kann man auch, wie §. 130 gesagt wurde, in drei oder vier Theile noch besonders theilen, wenn man einen höhern Grad von Genauigkeit erhalten will.

§. 133.

Will man indeß das hier gezeigte Verfahren dahin abändern, daß der gegebene Durchmesser nicht in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, sondern in ungleich große Theile getheilt wird, so findet Folgendes statt.

Man bringe zwei Linien unter einem rechten Winkel an einander und mache den einen seiner Schenkel, etwa **a b** (Fig. 144.), dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich. Nun nehme man die gegebene Weite **a i**, wenn sie größer als **a b** ist, in den Zirkel und beschreibe damit aus **a** einen Bogen **k i l**, wodurch **i** bestimmt wird, ziehe **a i** und nehme auf **a b** beliebige Punkte **c**, **d**, **e** ꝛc. an, errichte in denselben auf **a b** die Normalen **c 1**, **d 2** und **e 3**, verlängere sie, bis die **a i** davon in **f**, **g** und **h** getroffen wird. In diesen Punkten errichte man auf **a i** die Lothe **f 3**, **g 2** und **h 1** und mache

1 h = 1 c,
2 g = 2 d und
3 f = 3 e.

Zieht man nun die Punkte 1, 2 und 3 (über der **a i**)

durch eine Linie zusammen, so ist die sogenannte Vergatterung beendet.

Im Fall die Breite **a c** (Fig. 145.) kleiner ist, als der Durchmesser **a b** des zu vergatternden Halbkreises, so mache man **a b** zur Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks **a b c** und die **a c** zu dessen Kathete, nehme auf **a b** die Punkte **d**, **e**, **f** ꝛc. beliebig an, fälle von denselben auf **a c** die Lothe **d i**, **e h** und **f g** ꝛc. und verfahre übrigens ganz so, wie zu Anfange dieses §. gelehrt wurde *).

§. 134.

Die Zimmerleute müssen sich vorstehender Methode bedienen, um bei abgewalmten Bohlendächern aus den Leersparren die Geradsparren zu finden; ferner müssen z. B. bei Thurmspitzen, die aus verschiedenen Bogen konstruirt sind, die Leer- und Geradsparren auf dieselbe Art vergattert oder ausgetragen werden. Dasselbe findet bei den Geradbogen der Kreuzgewölbe und bei den Leerbogen zu den Stirnwänden, welche nicht vollen Zirkel haben, statt.

§. 135.

Der Punkt **a** oder **b** (Fig. 146.), wo der Bogen mit dem Durchmesser zusammenfällt, heißt bei den Gewölben „der Fuß" oder „das Füßchen." Sind die Füße der Gewölbebogen, wie **c** und **d**, nicht in horizontaler Lage, sondern in irgend einer Neigung gegen die **c e**, so nennt man den Bogen **c h d** einen steigenden Bogen, **f g** dessen Scheitellinie, **h** den Scheitelpunkt und **c d** die Steigungslinie.

§. 136.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen durch Vergatterung zu konstruiren.

---

*) Um aus der Hypothenuse **a b** und der Kathete **a c** das rechtwinklige Dreieck **a b c** zu konstruiren, darf man nur einen rechten Winkel **a c b** aufzeichnen, einen Schenkel desselben gleich **a c** machen, die Hypothenuse **a b** in den Zirkel nehmen und damit aus **a** einen Bogen beschreiben, welcher dann den Punkt **b** bestimmt, wodurch die **a b** von **a** ausgelegt und das Dreieck beendet wird. (§. 225.)

Auflösung.

Man beschreibe über **ab** (Fig. 146.) einen Halbkreis und theile **ab** in mehrere gleiche Theile. In eben so viel Theile theile man **cd**, errichte sowohl auf **ab**, als auch auf **cd** in den Theilungspunkten Perpendikel und verfahre dann wie §. 129 gelehrt wurde.

§. 137.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen auf andere Art zu finden.

Auflösung.

Wenn die Größe und Neigung der Steigungslinie **ab** gegen die horizontale **af** (Fig. 147.) gegeben oder bestimmt ist, so errichte man in **a** und **f** Lothe **ae** und **bd**. Ist ferner die Höhe **ae** des steigenden Bogens bestimmt, so trage man sie von **a** nach **e**, ziehe **de # ab** und halbire die **de** in **g**. Nun theile man **ae** und **bd** in mehrere gleiche Theile und in eben so viel gleiche Theile theile man die **eg** und **dg** und ziehe **g** mit **l**, **h** mit **m**, **i** mit **n**, **k** mit **a** zusammen und verfahre auf der andern Seite des Bogens eben so. Hierdurch erhält man eine gebrochene Linie, die sehr leicht zu einer krummen Linie durch Ausfüllung der Zwischenräume gemacht wird. Je näher man die Theilpunkte an einander legt, in je mehr gleiche Theile die **ae**, **eg**, **dg** und **bg** getheilt wird, desto bestimmter bekommt man den steigenden Bogen.

§. 138.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen auf ähnliche Art wie den steigenden in §. 137 zu konstruiren.

Auflösung.

Auf die gegebene Bogenweite **ab** (Fig. 148.) setze man die ebenfalls gegebene Höhe **cd** lothrecht in den Mittelpunkt **c** der **ab**, mache **af** in **a** und **be** in **b** auf **ab** normal und ziehe **ef # ab** durch **d**. Jede der Linien **af**, **df**, **de** und **be** theile man in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (mindestens in vier) bei 1, 2, 3 ꝛc. und ziehe, wie §. 137 geschehen, die Punkte d 1, 3.2, 2.3

1 a ꝛc. zusammen; diese Verbindungslinien bilden den gedrückten Bogen, der einer unbedeutenden Nachhilfe bedarf.

§. 139.

Bogen a d b (Fig. 149.), deren lothrechte Höhe c d größer, als ihre halbe Breite a c ist, heißen „überhöhte Bogen" oder „gebürstete Bogen."

§. 140.

Aufgabe.

Einen überhöhten Bogen auf dieselbe Art, wie die Bogen in §. 137 und §. 138 verzeichnet wurden, zu konstruiren.

Auflösung.

Man halbire a b (Fig. 149.) in c, errichte in diesem Punkt auf a b das Loth c d, dessen Höhe gegeben seyn kann, setze a f in a, b e in b auf a b lothrecht und ziehe e f # a b. Nun theile man jede der Linien a f, d f, d e und b e in eine beliebige Anzahl gleich großer und gleich viel Theile und verfahre, wie §. 137 und §. 138 gezeigt wurde.

§. 141.

Auch auf folgende Art kann man zu jeder gegebenen Breite c d (Fig. 150.) und Höhe g i einen gedrückten Bogen erhalten.

Wenn der Halbkreis über a b als Normalbogen gegeben ist, dessen halber Durchmesser die Höhe des gedrückten Bogens bestimmt; wenn ferner c d die Breite des neuen Bogens seyn soll, so beschreibe man über einer Linie e f = c d einen Halbkreis und aus dessen Mittelpunkt i schlage man noch einen Halbkreis vom Durchmesser g h = a b. In der Peripherie über e f nehme man Punkte k, l, m, n und o an, welche in willkürlichen Entfernungen von einander seyn können. Von diesen Punkten ziehe man die Halbmesser i k, i l, i m, i n und i o. Nun fälle man von jedem Punkt im größern, d. i. im äußern Halbkreise, nämlich von k, l, m, n und o Lothe auf die d f, und durch t, s, r, q und p lege man Horizontallinien, welche so lang gemacht werden müssen, bis sie die erstgefällten Lothe in den Punkten u, v, w, x und y schnei-

den. Verbindet man nun diese Durchschnittspunkte, so hat man den gedrückten Bogen **euvwxyf** erhalten.

§. 142.

Aufgabe.

Einen überhöhten Bogen und Kreisbogen zu konstruiren.

Auflösung.

Die gegebene Höhe **ab** (Fig. 151.) theile man bei **1** und **2** in drei gleiche Theile und beschreibe aus dem zweiten Theilpunkt **e** (von oben) mit **ae** den Bogen **cfagd**. Zieht man nun **df** und **cg** und beschreibt man aus **c** mit **cg** den Bogen **gh**, ferner aus **d** mit **df** den Bogen **fi**, so ist **ifagh** der gehöhte oder überhöhte Bogen. In diesem Falle kann nur die Höhe **ab** bestimmt oder gegeben seyn, die Breite **ih** findet sich durch die Konstruction.

§. 143.

Aufgabe.

Einen überhöhten Bogen von gegebener Breite und Höhe mittels eines Lineals und eines Winkelhakens zu zeichnen.

Auflösung.

Man halbire die gegebene Breite **cd** (Fig. 152.) in **b** und errichte in **b** auf **cd** ein Loth **ab**, an welches man die bestimmte, die gegebene Höhe von **b** an trägt. An dieses Loth **ab** befestige man einen Winkelhaken dergestalt, daß dessen Scheitel auf **b**, seine Schenkel aber nach **ab** und **bc** fallen. Ferner nehme man ein Lineal, an dessen Ende **e** ein Stift angebracht ist und mache darauf **eg** = **ab** und **ef** = **db**. In **f** und **g** werden Nägel in das Lineal eingeschlagen, woran es an **ab** und **bc** herauf- und herabgeschoben werden kann. Schiebt man nun das Lineal dergestalt, daß der Nagel bei **g** immer an **bc** und der andere Nagel bei **f** stets an **ab** bleibt, so beschreibt der Stift in **e** den Bogen **ad**. Nun wende man den Winkelhaken auf die andere Seite, damit **bg** auf **bd** zu liegen kommt und beschreibe dann, wie zuvor, den Bogen **ac**.

§. 144.

Die Konstruction des im vorigen §. beschriebenen überhöhten Bogens kommt mit der des §. 146 und §. 147 überein und der Bogen selbst ist eine halbe richtige Ellipse. Die Weite f g (Fig. 152.) auf dem Lineale ist die Entfernung der Brennpunkte e (Fig. 154.) und f vom Mittelpunkt b der Ellipse a c g d.

§. 145.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen aus Kreisbogen zusammenzusetzen.

Erste Auflösung.

Wenn die Steigungslinie a f (Fig. 153.), so wie die Höhe a c des Scheitels bestimmt ist, so lege man a l normal an a c, fälle von f auf a l das Loth e h und ziehe c e # a h. Nun mache man h i = a f, halbire a i in k, setze d k in k normal auf a l und mache f g # a h. Beschreibt man nun aus k mit a k den Bogen a d und aus g mit f g den Bogen d f, so ist der Bogen a d f der aus den Kreisbogen a d und d f zusammengesetzte steigende Bogen.

Andere Auflösung.

Wenn die Steigungslinie a b (Fig. 155.) gegeben ist, so errichte man auf der Horizontallinie a c die Lothe a g und c f, halbire a c in d, mache d e normal auf a c, trage a m von m nach e, ziehe die a e, halbire sie in l, errichte in l auf a e das Loth l h und ziehe e h, dann die b i # a c. Beschreibt man nun aus h mit a h den Bogen a e, dann mit b i aus i den Bogen e b, so ist a e b der steigende Bogen.

§. 146.

Aufgabe.

Mittels zweier Nägel und einer Schnur einen gedrückten Bogen nach gegebener Breite und Höhe zu zeichnen.

Auflösung.

Man theile die gegebene Breite a b (Fig. 156.) des Bogens bei c in die Hälfte, mache die gegebene Höhe c d

normal in c auf der a b, trage a c von d nach e und mache c f = c e. In die beiden Punkte e und f schlage man Stifte ein und lege um sie eine Schnur oder Kette, die von festem feinen Drahte gefertigt ist, welche von a nach f und von f bis a reicht und gut zugebunden ist, so daß, wenn man sie anspannt, sie von f bis a reicht. Nun nehme man einen Stift, halte ihn in die Schnur, spanne sie an und fahre mit ihm von a über g, d bis b: er beschreibt dann den gedrückten Bogen.

§. 147.

Ein auf vorstehende Art konstruirter Bogen ist eine wirkliche halbe Ellipse, die auch ganz gezeichnet werden kann, wenn man den Stift von b (Fig. 156.) ab, weiter herunter bis a zurückführt. Wie man die Brennpunkte e und f durch Rechnung finden kann, ist in meinem arithmetischen Handbuche (Breslau 1833, im Verlage der Pelz'schen Buchhandlung) §. 388 gewiesen.

§. 148.

Aufgabe.

Die Achsen, so wie den Mittelpunkt einer Ellipse zu finden.

Auflösung.

Man nehme in der Ellipse einen beliebigen Punkt a (Fig. 157) und ziehe durch denselben eine willkürliche Linie a b, mache mit ihr c d parallel und halbire beide Linien, jene in e, diese in f und ziehe g h. Nun halbire man g h in i, ziehe l i in beliebiger Lage, beschreibe mit i l aus i einen Kreis und aus den Durchschnittspunkten k und l beschreibe man mit k l die Bogen o k und o l, welche sich in o schneiden, ziehe durch o und i die o n und setze auf diese Linie in i die r s normal. Es ist sodann i der gesuchte Mittelpunkt, r s die große und m n die kleine Achse der Ellipse.

§. 149.

Aufgabe.

Die Brennpunkte einer Ellipse zu finden*).

*) §. 147.

Auflösung.

Zuvörderst bestimme man (§. 148.) die Achsen **a b** und **c d** (Fig. 158.), nehme **a e** in den Zirkel und beschreibe mit dieser Weite aus **c** einen Bogen, welcher die große Achse **a b** in **f** und **g** schneidet. Diese Durchschnittspunkte **f** und **g** sind dann die verlangten Brennpunkte.

§. 150.

Aufgabe.

Eine Eilinie von gegebener Breite **a b** (Figur 159.) zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Die Breite **a b** theile man bei **c** in die Hälfte, mache **d h** lothrecht auf **a b** in **c** und beschreibe um **c** einen Kreis. Durch **a** und **e**, ferner durch **b** und **e** ziehe man gerade Linien, welche die aus **a** und **b** mit **a b** zu beschreibenden Bogen **b g** und **a f** in **f** und **g** begrenzen. Schlägt man endlich aus **e** mit **e f** den Bogen **f h g**, so ist **a d b g h f a** die verlangte Eilinie.

Andere Auflösung.

Die Breite **a b** (Fig. 160.) theile man bei **c** in die Hälfte, errichte in diesem Punkte auf **a b** ein Loth **d f**, welches über und unter die **a b** reicht, theile **a b** in sechs Theile, mache $\mathbf{cd} = \mathbf{ch} = \frac{1}{6}\,\mathbf{ab}$ und $\mathbf{cf} = \mathbf{ec}$ zwei Sechsteln gleich; ziehe durch **d** und **g** die **g h**, durch **d** und **h** die **h k**, durch **f** und **h** die **h l** und durch **f** und **g** die **g i**. Nun beschreibe man mit **a g** aus **g** den Bogen **h a i** und aus **h** mit **a g** den Bogen **k b l**, aus **d** mit **d h** den Bogen **h k** und aus **f** mit **f i** den Bogen **i l**; wodurch denn **a h k b l i a** die verlangte Eilinie ist.

§. 151.

Aufgabe.

Eine Eilinie zu konstruiren, bei welcher weder die Länge, noch die Breite gegeben seyn kann.

Auflösung.

Mit einem beliebig großen Radius **a e** (Fig. 161.) beschreibe man einen Kreis, nehme in dessen Peripherie einen willkürlichen Punkt **b** an und beschreibe daraus mit

dem anfänglich gewählten Halbmesser **ab** noch einen Kreis, lege durch die beiden Mittelpunkte **a** und **b** derselben eine gerade Linie **ao**, ziehe durch **a** und **d** die **de**, durch **a** und **c** die **cf**, beschreibe aus **d** mit **de** den Bogen **ei** und aus **c** mit derselben Zirkelöffnung den Bogen **fi**; ferner halbire man **bi** in **k**, ziehe durch **c** und **k** die **ch** und durch **d** und **k** die **dg**. Beschreibt man endlich aus **k** mit **kg** den Bogen **gnh**, so ist **efhige** die zu konstruirende Eilinie.

§. 152.

Aufgabe.

Eine Eilinie nach gegebener Länge und Breite zu zeichnen.

Auflösung.

Es sey **ab** (Fig. 162.) die gegebene Länge, **cd** die bestimmte Breite der zu zeichnenden Eilinie. Man halbire die Breite **cd** in **e**, mache **ae = ce** und **cd** in **e** lothrecht auf **ab**. In der Nähe von b nehme man einen Punkt **f** beliebig, doch aber so, daß **bf** kleiner, als **ce** wird, beschreibe um ihn mit **bf** einen Kreis, mache **fk = cg**, ziehe **fg** und errichte darauf in deren Halbirungspunkte **h** ein Loth, welches so lang gemacht wird, bis es die Verlängerung der **cd** in **i** trifft. Durch **i** und **f** ziehe man die **ik** und beschreibe damit aus **i** den Bogen **ck**, trage **ie** auf die andere ihr entgegengesetzte Seite in die Verlängerung der **ce** und beschreibe dann den Bogen **bd** mit **ik**, wodurch die Eilinie beendet ist.

§. 153.

Die Baumeister wenden die Eilinien oft bei den Backöfen an, indem sie deren Heerde von einem Gewölbe begrenzen, dessen Grundriß eine Eilinie bildet. Außerdem findet man auch hin und wieder Säle, welche diese Form haben und dies ist meistens der Fall, wenn Säle in dreieckige Räume gelegt werden müssen.

Der folgende §. enthält die Konstruction einer sogenannten Backofenlinie nach Triest.

§. 154.

Aufgabe.

Eine Backofenlinie von gegebener Breite zu konstruiren.

Auflösung.

Die gegebene Breite **a b** (Fig. 163.) theile man in sechs gleiche Theile, beschreibe aus **c** mit **a c** einen Halbkreis, errichte in **c** und **d** auf **a b** Lothe **c e** und **d f** und beschreibe aus **a** mit **a b** den Bogen **b f** aus **b** den Bogen **a e** und mache **e g** = **f h** gleich einem Sechstel von **a b**. Wird nun **g h** gezogen, so ist **g h** das Mundloch und **e a i b f** die Backofenlinie.

§. 155.

Den Schluß dieser Abtheilung mag außer der Beschreibung des Ellipsographs noch eine andere Methode, gedrückte Bogen zu zeichnen, machen, die lediglich ihrer Eigenthümlichkeit wegen hier einen Platz erhält. Die hiernach erhaltene krumme Linie ist sehr flach, sehr gedrückt, an den Spitzen aber, wo sie in die Anfangspunkte der großen Achse fällt, sehr steil, weshalb sie wohl nur in wenigen Fällen anzuwenden ist.

§. 156.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen mittels einer Menge Kreisbogen, die sich durchschneiden, zu konstruiren.

Auflösung.

Die Breite **a b** (Fig. 164.) ist gegeben; diese theile man bei **c, d, e, f, g** ꝛc. in gleiche Theile (wie viel deren sind, ist gleichgiltig: je mehr, desto besser), setze in **a** ein und beschreibe mit **a c**, dann mit **a d**, ferner mit **a e**, **a f, a g, a h** ꝛc. Kreisbogen. Eben so beschreibe man aus **b** mit **b l, b k, b i, b h, b g, b f** ꝛc. Kreisbogen, welche jene in den Punkten **m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, 1, 2, 3, 4, 5** und 6 durchschneiden. Verbindet man nun diese Durchschnittspunkte durch eine Linie, so ist diese die gesuchte Kurve.

§. 157.

Aufgabe.

Eine Ellipse mittels eines sogenannten Ellipsenzirkels (Ellipsograph) zu beschreiben.

Auflösung.

A (Fig. 167.) ist der Grundriß und B ist der Aufriß des Ellipsographs, der aus zwei Rinnen h k und i l besteht, welche rechtwinklig in Kreuzform an einander befestigt sind. In diesen Rinnen laufen Knöpfe e und f, welche zugleich in ein Lineal g m greifen und daran befestigt sind, doch so, daß sie sich leicht daran herumdrehen können. Bei g ist ein Stift angebracht, oder man hat statt dessen eine Hülse, in welche z. B. Bleistift, Rothstein, Kohle, Kreide u. dgl. m. gesteckt werden kann. Bei n sind in sehr kleinen Entfernungen von einander Löcher angebracht, die so groß sind, daß die beweglichen Knöpfe e und f sich darin leicht drehen können. Will man nun mit diesem Instrument eine Ellipse zeichnen, deren große Achse a b und deren kleine Achse c d gegeben ist, so bringe man diese Achsen in ihren Mittelpunkten unter einem rechten Winkel an einander, setze das Instrument dergestalt auf diese Zeichnung, daß die Spitze o, d. i. der Mittelpunkt des Zirkels, nach r kommt, die Spitzen p und q an den Füßen aber in die Achse a b und die beiden andern Spitzen bei i und l in die Achse c d fallen. Nun stelle man die Knöpfe e und f dergestalt, daß e g = b r und f g = d r werde und fahre mit dem Stifte g um h i k l herum; es wird dann dieser Stift eine Ellipse zu den gegebenen Achsen beschreiben.

§. 158.

Der hier beschriebene Ellipsenzirkel kommt mit der §. 143 und §. 146 getroffenen Einrichtung überein. Das Instrument ist auch im Großen zur Beschreibung der Gewölbeleerbogen mit Vortheil zu gebrauchen. Mit einem Lineal oder Stabe m g (Fig. 167.), von etwa sechs Fuß Länge, kann man gedrückte Bogen von zwölf Fuß Spannung konstruiren. Uebrigens ist der Ellipsograph eine alte Erfindung, obschon man sie ohnlängst dem Akademiker v. Parrot zueignen wollte. In **Elementis analyseos finitorum** von Wolff, §. 471, ist das Instrument beschrieben und daselbst auch bewiesen, daß die dadurch konstruirte krumme Linie eine wirkliche Ellipse ist.

Sechste Abtheilung.

Konstruction der durch die Kegelschnitte entstehenden und anderer krummen Linien; so wie das Konstruiren der Tangenten bei den Ellipsen.

§. 159.

Aufgabe.

Eine Ellipse zu konstruiren, wenn deren Achsen gegeben sind.

Auflösung.

Wenn man ohne Schnur und Nägel, ohne Ellipsograph, nur mit Zirkel und Lineal eine Ellipse verzeichnen soll, so bringe man zuvörderst deren Achsen **a b** und **c d** (Fig. 168.) in deren Halbirungspunkten **e** rechtwinklig an einander, bestimme die Brennpunkte **F** und **f** nach §. 149, indem man **CF = cf = ae** macht und nehme auf **ae** oder auf **be** beliebige Punkte **l, m, n, o** ꝛc. an, mache **ep = oe, eq = en, er = em, es = el** ꝛc. Nun beschreibe man aus **F** mit **aF, al, am, an, ae, ap, ag, an, as** ꝛc. Kreise, oder auch nur Kreisbogen, welche so groß sind, daß sie in die Gegend zwischen **ac** kommen; ferner beschreibe man aus **f** mit **bF, bl, bm, bn** ꝛc. Kreise, oder auch nur Kreisbogen, welche groß genug sind, um die erstgezeichneten Bogen in **g, h, i, k, l** ꝛc. zu schneiden. Auf ähnliche Art verfährt man auf der andern Seite bei **bc** und **bd** und zieht dann die gefundenen Durchschnittspunkte durch eine krumme Linie zusammen.

Auch hier ist es der Fall, daß, je näher man die Punkte **n, m, l** ꝛc. an einander legt und je mehr man deren nimmt, die Kurve desto genauer und richtiger erhalten wird.

§. 160.

Aufgabe.

Eine Parabel zu zeichnen.

Auflösung.

Man nehme eine beliebige Linie **ac** (Fig. 169.) und halbire sie in **b**; ebenfalls halbire man die **ab** in **d**, beschreibe mit **bd** um **d** einen Kreis und theile dessen Halbmesser **bd** in eine beliebige Anzahl gleich großer Theile,

bei e, f, g ꝛc. Nun beschreibe man aus e mit ae, dann aus f mit af, ferner aus g mit ag und zuletzt aus b mit ab Kreise. Auf bc errichte man in b, q, r, s ꝛc. und c Lothe und ziehe durch h die hm # bc, durch i die in # bc, durch k die ko # bc ꝛc. und durch l die lp # bc. Verbindet man hierauf die Durchschnittspunkte b, m, n, o ꝛc. und p durch eine Linie, so ist diese die Parabel.

Andere Auflösung.

In dem Mittelpunkte d der gegebenen Linie ab (Figur 170.) errichte man ein Loth, trage auf dasselbe von d ab die gegebene Höhe cd und mache ce = cd. Nun ziehe man ae und be, theile jede dieser Linien in eine beliebige Menge gleicher Theile (hier in acht) und ziehe die Punkte 7.1, 6.2, 5.3, 4.4, 3.5, 2.6 und 1.7 durch gerade Linien zusammen, welche die Parabel durch eine gebrochene Linie darstellen, die leicht in eine krumme durch Nachhilfe eingeformt werden kann.

Dritte Auflösung.

Auf eine willkürlich genommene gerade Linie ab (Figur 173.) setze man von a nach b die ac, welche ebenfalls von beliebiger Länge ist, die doch aber stets eine sehr kurze Linie seyn muß *) und mache cd = ac. Durch d ziehe man ef lothrecht auf ab und durch mehrere in ab beliebig genommene Punkte r, s, t, u, v ꝛc. ziehe man die pq, ef, gh, ik, lm, no ꝛc. parallel mit ef. Nun beschreibe man aus d mit ar einen Bogen bis an die Linie pq, wodurch die Punkte p und q bestimmt werden. Eben so mache man dh = dg = as, ferner dk = di = at, auch dm = dl = au und do = dn = dw; die de = df aber mache man so groß, wie ad. Zieht man nun die gefundenen Durchschnittspunkte n, l, i, g, e, p, c, q, f, h, k, m und o zusammen, so hat man die Parabel konstruirt.

§. 161.

Aufgabe.

Eine Parabel durch mehrere Kreisbogen darzustellen.

---

*) Sie ist ein Viertel vom Parameter.

Auflösung.

In den beliebig genommenen Punkt d (Fig. 171.) einer Linie a b setze man die gegebene Höhe c d lothrecht, mache d e = c d und beschreibe mit c d aus c einen Bogen f d g. Aus e schlage man mit c e den Bogen f c g und ziehe durch f und e, so wie durch g und e gerade Linien f i und g h; mache e i = e f und e h = e g. Setzt man nun in i ein und beschreibt man daraus mit f i den Bogen a f und aus h mit g h den Bogen b g, so bilden die drei Bogen a f, f c g und g b die Parabel.

§. 162.

Will man indeß die §. 161 konstruirte Parabel fortsetzen, so theile man die Höhe c d (Fig. 172.) in sechs gleiche Theile und konstruire übrigens nach dem vorigen §. die drei Bogen a f, f c g und b g. Jetzt lege man durch b und h eine Linie b k = 8 c d und eben so lang mache man a l. Aus a und b schlage man mit einem Halbmesser von $9\frac{1}{2}$ Theilen der Linie c d die Bogen v u und aus k und l beschreibe man mit b k die Bogen a n und b m. Nun ziehe man durch m und k die m o = 16. c d und eben so lang mache man die n p, setze in o ein und beschreibe mit o m den Bogen m r und aus p mit p n den Bogen n q, wodurch dann die krumme Linie q n a f c g b m r aus sieben Kreisbogen zusammengesetzt und einer Parabel ziemlich gleich ist.

§. 163.

Aufgabe.

Mittels eines Triangels, eines Lineals und einer Schnur eine Parabel zu konstruiren.

Auflösung.

An einem wohlbefestigten Lineal e f (Fig. 174.) ziehe man eine gerade Linie und nehme in ihr einen Punkt c beliebig an; errichte in demselben auf e f ein Loth b c, nehme darauf die willkürliche Weite a c (die aber nicht sehr groß seyn darf) und lege an das Lineal e f einen Winkelhaken b c g, der an dem gedachten Lineale hin und her geschoben werden kann. In b errichte man auf b c einen Perpendikel und nehme eine Schnur, die so lang ist, wie b c, befestige das eine Ende derselben an dem Win-

kelhaken bei b und das andere in d. Wird nun an die Schnur ein Stift gebracht und die Schnur selbst daran angespannt, so wird dieser Stift in a stehen, die Schnur selbst wird bei a d doppelt seyn und von d nach b zu einfach liegen. Schiebt man nun den Winkelhaken behutsam von c gegen f zu und folgt man demselben mit dem Stifte, welcher dicht anliegt, so erhält man zuvörderst die halbe Parabel a h; und wenn der Winkelhaken auf die andere Seite gegen b i gewendet wird, so kann dann ganz nach demselben Verfahren die andere Hälfte a i der Parabel gezogen werden.

§. 164.

Aufgabe.

Eine Hyperbel zu zeichnen.

Auflösung.

Man nehme eine beliebige Länge f F (Fig. 175.) und eine ebenfalls willkürliche Höhe g h, bringe beide Linien in ihren Halbirungspunkten e unter einem rechten Winkel an einander und mache h c = h d = e f. Nun ziehe man eine gerade Linie a m, trage die c d von a nach b und nehme von b gegen m zu beliebige Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc. auf b m an. Jetzt beschreibe man aus dem Punkte f nach und nach mit den Halbmessern b 1, b 2, b 3, b 4, b 5, b 6, b 7 ꝛc. Kreise (oder auch nur Kreisbogen) und mit denselben Radien beschreibe man aus F solche Kreise oder Kreisbogen. Beschreibt man nun aus F mit den Halbmessern a 1, a 2, a 3, a 4, a 5, a 6, a 7 ꝛc. ebenfalls Kreise oder hinlänglich große Kreisbogen, so werden die aus f geschlagenen Kreise oder Bogen in der Ordnung, in welcher sie beschrieben wurden, in i, k, l, m, n, o ꝛc. geschnitten und es ist, wenn man diese Durchschnittspunkte durch eine Linie verbindet, der Hyperbel gezeichnet. Ganz auf dieselbe Art wird die Kurve p F q gezeichnet.

§. 165.

Aufgabe.

Mittels Winkelhaken und Schnur eine Hyperbel zu konstruiren.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie m n (Fig. 176.), nehme darauf a b willkürlich, oder nach einer gegebenen Länge

und eben so mache man b f = a F auch von beliebiger Länge, die aber allemal kleiner, als a b seyn muß. An F lege man ein von Holz oder von irgend einer andern Materie gearbeitetes rechtwinkliges Dreieck l o F, befestige bei F an dasselbe einen kleinen Ring und lege ihn um einen bei F eingeschlagenen Stift. Ferner befestige man bei l und bei F eine Schnur, deren Länge l f = l F — a b seyn muß. Nun lege man das Dreieck dergestalt, daß F l an die Linie m n komme und bringe an der Schnur f l einen Stift dergestalt an, daß er die Schnur an die Seite l F des Triangels andrückt, wodurch der Stift zuerst den Punkt b in der Hyperbel bestimmen wird. Jetzt wende man das Dreieck bei o mit der linken Hand, so daß dessen Seite F l sich immer mehr und mehr von m n entferne, und drücke zugleich den Stift an die Seite F l des Dreiecks fest an und es wird dadurch die Linie b p h beschrieben. Auf ähnliche Art verfahre man, um die krumme Linie b i über m n zu erhalten.

§. 166.

Aufgabe.

Auf einen in der Ellipse gegebenen Punkt einen Perpendikel zur Ellipse zu errichten.

Auflösung.

Zuvörderst ziehe man die Achsen a b und c d (Fig. 177.), bestimme mit a c aus c die Brennpunkte f und g (§. 149.) und ziehe von dem gegebenen Punkte h die Linien f h und g h, verlängere sie etwa bis i und k und beschreibe aus h mit i h den Bogen i k und aus i und k mit i k die Bogen l i und k l. Verbindet man nun l mit h, so ist l h ein Perpendikel auf der Ellipse.

§. 167.

Wenn man bei architektonischen Zeichnungen die Fugen der Ziegeln an elliptischen Gewölbebogen zeigen will, so muß man sich der Konstruction des vorigen §. bedienen, da alle diese Fugen lothrecht auf der Ellipse stehen.

§. 168.

Aufgabe.

An einen in einer Ellipse gegebenen Punkt h (Fig. 178.) eine Tangente an die Ellipse zu legen.

Auflösung.

Die Achsen **a b** und **c d** bringe man in ihren Halbirungspunkten **e** rechtwinklig auf einander, bestimme aus **c f = a e** die Brennpunkte **f** und **g**, ziehe von dem gegebenen Punkte **h** die **f h**, **g h** und mache **h l** in **h** perpendikulär auf der Ellipse (§. 166). Nun ziehe man von einem beliebigen Punkt **i** die **h i** und beschreibe aus **i** mit **i h** einen Kreis, wodurch die **h l** in **k** geschnitten wird. Zieht man nun den Durchmesser **k m** dieses Kreises, so ergibt sich in der Peripherie ein Punkt **m**, durch welchen man die **m n** an **h** zieht, welches die verlangte Tangente ist.

§. 169.

Aufgabe.

Ein außerhalb einer Ellipse liegender Punkt **h** (Fig. 179a) ist gegeben, man soll von demselben eine Tangente an die Ellipse ziehen.

Auflösung.

Die Achsen **a b** und **c d** werden in ihren Halbirungspunkten **e** rechtwinklig auf einander in die Ellipse gebracht und mit **a e** werden aus **c** die Brennpunkte **f** und **g** bestimmt. Jetzt verbinde man den gegebenen Punkt **h** mit dem Fokus **f**, das ist: man ziehe **f h** und beschreibe aus **h** mit **f h** einen Bogen, den man durch einen andern aus **g** mit **a b** beschriebenen Bogen in **i** schneidet. Wird nun **i** mit **f** verbunden und **f i** in **k** halbirt, so ist, wenn durch **k** und **h** eine gerade Linie **h l** gezogen wird, diese die von **h** an die Ellipse gehende Tangente.

§. 170.

Aufgabe.

Von einem außerhalb einer Ellipse liegenden Punkte **c** (Fig. 179b) einen Perpendikel auf die Ellipse zu ziehen.

Erste Auflösung.

Nach dem vorigen §. lege man von dem Punkte **c** zwei Tangenten **c d** und **c b** an die Ellipse, nehme **g** willkürlich in der **b c**, beschreibe aus **c** mit **c g** einen Bogen **f g** und halbire denselben in **h**. Legt man nun von **c** durch **h** eine gerade Linie **c i** bis an die Ellipse, so ist diese der Perpendikel, welcher konstruirt werden sollte.

Andere Auflösung.

Man verbinde den gegebenen Punkt a (Fig. 698.) mit den Brennpunkten b und c durch die geraden Linien a b und a c und halbire den hierdurch entstandenen Winkel b a c; die Halbirungslinie a g ist der Perpendikel auf der Ellipse. Am leichtesten findet man die a g, wenn man den Bogen d e in f halbirt und durch a und f die a g zieht.

§. 171.

Aufgabe.

An einen in einer Parabel liegenden Punkt a (Fig. 180.) eine Tangente zu ziehen, wenn der Brennpunkt der Parabel bekannt ist.

Auflösung.

Man ziehe die Achse d e durch f, mache b e = b f und lege g h lothrecht an d e in e. Nun fälle man von dem gegebenen Punkt a auf die g h ein Loth a g, ziehe f g und halbire sie in i. Zieht man nun durch i und a die a k, so ist dies die Tangente an a in der Parabel

§. 172.

Aufgabe.

Ein außerhalb einer Parabel liegender Punkt l (Fig. 181.), nebst dem Brennpunkte f ist gegeben, man soll von diesem Punkt eine Tangente an die Parabel legen.

Auflösung.

Der Brennpunkt f wird durch die l f mit dem gegebenen Punkte l verbunden, a b = b f gemacht und durch a die c d auf a f lothrecht gezogen. Aus l beschreibe man mit l f den Bogen e f und mache aus e auf c d eine Normale e g, so lang bis sie die Parabel in g schneidet. Zieht man nun durch l und g die h l, so ist sie die von l an die Parabel gehende Tangente.

§. 173.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt f (Fig. 182.) in einer Hyperbel gegeben, man soll von ihm eine Tangente an die Hyperbel legen.

Auflösung.

Mit der Asymplote c e ziehe man die f g parallel durch den gegebenen Punkt f und mache g h = c g. Zieht man nun durch h und f die h i, so ist sie die verlangte Tangente.

§. 174.

Wenn man einen Cylinder mit Papier umhüllt und darauf einen Punkt a (Fig. 183.) annimmt, so kann man mit einem Zirkel, dessen einen Fuß man in a feststellt, auf diesem Papier durch den andern Zirkelfuß b eine krumme Linie beschreiben, die, wenn man das Papier auf eine Ebene legt, eine vollkommene Ellipse ist.

Siebente Abtheilung.

Konstruction der sogenannten Schneckenlinien.

§. 175.

Aufgabe.

An eine Linie a b (Fig. 184.) eine Schnekkenlinie zu ziehen, welche aus lauter Halbkreisen besteht und deren Windungen oder Gänge von einander gleich weit entfernt sind.

Auflösung.

Die gegebene Linie a b theile man in eine beliebige Anzahl gleicher (etwa in acht) Theile; den Theil c d, welcher in der Mitte der a b liegt, halbire man in m und beschreibe daraus mit c m einen Halbkreis. Nun schlage man aus d mit c d, ferner aus m mit m e, dann wieder aus d mit d f, aus m mit m g u. s. f. Halbkreise, welche dann eine Schneckenlinie oder Spirale bilden, deren Gänge stets gleich weit von einander sind.

§. 176.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie zu ziehen, welche aus Halbkreisen besteht, deren Gänge sich aber mehr und mehr von einander entfernen.

Auflösung.

Auf einer beliebig großen Linie **de** (Fig. 185.) nehme man einen Punkt **b** an und beschreibe aus ihm mit einer willkürlichen Weite **a b** einen Halbkreis **a c g**. Nun setze man in **a** ein und beschreibe mit **a c** den Halbkreis **c h d**. Jetzt wird aus **c** mit **c d** der Halbkreis **d i e** geschlagen, dann aus **d** mit **d e** der Halbkreis **f k e** u. s. f., bis man so viel Schneckenwindungen erhalten hat, als man deren bedarf. Soll eine solche Schneckenlinie von einer bestimmten Anzahl Windungen in eine gegebene Breite konstruirt werden, so merke man Folgendes: Wenn **n** die Anzahl Gänge oder Bogen der Schnecke bedeutet, so ist die Anzahl gleicher Theile, in welche die gegebene Breite getheilt werden muß, allemal $= 2^n$.

Will man also drei Windungen zwischen **d e** haben, so ist, weil $n = 3$ und

$2^3 = 8$ ist,

die Weite **d e** in 8 gleiche Theile zu theilen. Nun fängt man die Konstruktion damit an, daß man zuerst einen Theil in den Zirkel nimmt und einen Halbkreis schlägt; hierauf nimmt man zwei und endlich vier solcher Theile in den Zirkel und beschreibt damit Halbkreise, welche dann die Schneckenlinie bilden.

§. 177.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie zu ziehen, deren Gänge sich nur allmählig erweitern.

Auflösung.

Man schlage mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, theile dessen Durchmesser **a o** (Fig. 186.) in sechs gleiche Theile und verlängere **a o** auf beiden Seiten bis **n** und **l**. Nun beschreibe man aus 2 mit **2 a** den Halbkreis **a b c**; ferner aus 4 mit **4 c** den Halbkreis **c d e**; aus 1 mit **1 e** den Halbkreis **e f g**; dann aus 5 mit **5 g** den Halbkreis **g h i**; dann aus **o** mit **o i** den Halbkreis **i k l** und zuletzt aus 6 mit **6 l** den Halbkreis **l m n**.

§. 178.

Derjenige Kreis, welcher bei der Schneckenlinie gleichsam deren Mittel bildet, wird „Auge" genannt und es geht von seiner Peripherie allemal die Spirallinie aus.

§. 179.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie in einer bestimmten Höhe zu konstruiren und welche drei Gänge hat.

Auflösung.

Ehe das Ziehen der Schneckenlinie vorgenommen werden kann, muß man sich zuvor mit der Konstruction des hierzu nöthigen Schneckenauges bekannt machen.

Man schlage einen Kreis um **e** (Fig. 187.) mit einem Radius, welcher von der Schneckenhöhe abhängt, wie wir bald sehen werden, bringe die Durchmesser **ac** und **bd** so auf einander, daß sie rechte Winkel bilden und ziehe die Diagonalen **ab**, **bc**, **cd** und **da**. Jede dieser Diagonalen halbire man und ziehe von deren Halbirungspunkten durch das Centrum **e** die **gi** und **fh**. Wird nun jeder der Linien **ef**, **ge**, **eh** und **ei** in drei gleiche Theile getheilt, so ist das Schneckenauge beendet.

Außerdem pflegt man noch an die Theilpunkte der Linien **ef**, **ge**, **eh** und **ei** Ziffern von 1 bis 12 zu setzen, wie die Figur zeigt.

Die Konstruction der Schnecke selbst ist nun folgende: Die gegebene Höhe **ac** (Fig. 188.) derselben theile man in sechszehn gleiche Theile. In dem neunten Theile **o** von **a** ab ist der Mittelpunkt des Auges, welches man (aus **o**) mit einem Halbmesser beschreibt, der ein Sechszehntheil von **ac** ist. Durch **o** ziehe man **bd** normal auf **ac** und setze in dem Punkte 1 des Auges den Zirkel ein, öffne ihn bis **a** und beschreibe den Bogen **ab**. Hierauf schlage man aus 2 mit 2**b** den Bogen **bc**, dann aus 3 mit 3**c** den Bogen **cd**, hierauf aus 4 mit 4**d** den Bogen **de** und fahre auf diese Art fort, bis nach und nach die Bogen **ef**, **fg**, **gh**, **ik**, **kl** und **lm** beschrieben sind; der letzte Bogen **lm**, welcher **nro**12 mit 12**m** geschlagen wird, muß allemal genau bei **n** in die **ac** und in die Peripherie des Schneckenauges fallen. Wäre dies nicht der Fall, so hätte man die Ueberzeugung, daß die Schneckenlinie unrichtig konstruirt ist.

§. 180.

Die Schnecke, deren Konstruction der §. 179 enthält, wird bei der jonischen, corinthischen und römischen Ord-

nung mit Nutzen angewendet. Jede der Schnecken, welche bei den erwähnten drei Säulenordnungen angebracht ist, muß, wenn man aus ihrem Mittelpunkte gerade Linien an sie zieht, von dieser stets in drei Punkten geschnitten werden.

§. 161.

Aufgabe.

Auf eine andere Art eine Schneckenlinie mit drei Gewinden in jede beliebige Höhe zu konstruiren.

Auflösung.

Das zu dieser Konstruktion gehörige Auge wird auf folgende Art gezeichnet.

Mit einem Halbmesser, welcher allemal der sechszehnte Theil der Schneckenlinie ist, beschreibe man einen Kreis und ziehe dessen Durchmesser **a b** (Fig. 189.), welcher bei **d, c** und **e** in vier gleiche Theile getheilt wird. In den Theilpunkten der **a b** errichte man auf dieser Linie die Lothe **d f** und **e g**, die so lang gemacht werden, daß die sie verbindende Linie **f g** eine Tangente wird, das heißt, man mache $\mathbf{df = eg = ac = \frac{ab}{2}}$.

Nun ziehe man **c f** und **c g**, theile sowohl **c d**, als auch **c e** bei 5 und 9, bei 12 und 8 in drei gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit **d f** oder **g e** bis an die Diagonalen **c f** und **c g**. Die hierdurch in den Diagonalen erhaltenen Punkte verbinde man mit geraden Linien und setze bei **d, f, g, e**, so wie an allen übrigen Theilpunkten Zahlen von 1 bis 12, wie die Figur zeigt. Hat man nun das Auge nach der so eben gegebenen Erklärung gezeichnet, so gehe man an die Konstruction der Schnecke. Die gegebene Höhe derselben sey **a b** (Fig. 190.); diese wird in sechszehn gleiche Theile getheilt und aus dem neunten Theile **c** derselben, von **a** an, ein Kreis geschlagen, dessen Halbmesser einem Neuntel der **a b** gleich ist. Dieser Kreis ist nun das Auge, welches, wie so eben gezeigt wurde, konstruirt werden muß. Nun beschreibe man aus den zwölf Theilpunkten des Auges Kreisbogen und zwar aus 1 mit **a 1** den Bogen **a d** und ziehe **2 d**; ferner beschreibe man aus 2 mit **2 d** einen Bogen **d e** und ziehe **2 e**. Auf ähnliche Art fahre man fort und konstruire

aus 3 mit 3e den Bogen ef und ziehe 3f;
" 4 " 4f " " fg bis an ab;
" 5 " 5g " " gh und ziehe 5h;
" 6 " 6h " " hi und ziehe 6i;
" 7 " 7i " " ik und ziehe 7k;
" 8 " 8k " " kl bis an ab;
" 9 " 9l " " lm und ziehe 9m;
" 10 " 10m " " mn und ziehe 10n;
" 11 " 11n " " no und ziehe 11o; endlich
" 12 " 12n " " op, welcher den Schluß macht,

und im Punkte p sowohl das Auge, als auch die Achse ab treffen muß.

Auch diese Schneckenlinie hat stets, wenn sie richtig konstruirt ist, drei Windungen.

§. 182.

Die Konstructionen, welche §. 179 und §. 181 enthält, haben, so anwendbar sie übrigens unter allen Umständen auch sind, dann doch das Nachtheilige mit sich, daß, wenn beim Zeichnen der Schnecken ein selbst nur sehr kleiner Fehler gemacht wird, dieser sich nicht nur bis zum Ende fortpflanzt und vergrößert, sondern auch erst zuletzt beim Ziehen des Schlußkreisbogens wahrgenommen wird. Es ist daher die Methode, Schneckenlinien aufzureißen, welche im folgenden §. enthalten seyn wird, besonders den Technikern vortheilhafter, als die beiden erwähnten; da sie besonders jeden etwa gemachten Fehler bald wahrnehmen läßt. Dem Architekturzeichner dürfte sie indeß aus dem Grunde nicht zusagen, weil, wenn er auch die größte Akkuratesse beim Ziehen der vierundzwanzig Kreisbogen, woraus diese Schneckenlinie zusammengesetzt ist, beobachtet, er doch durch diese Konstruction niemals ganz genau eine scharfe Spirallinie auf das Papier bringt. Der Bildhauer und der Steinmetz haben durchaus keinen Nachtheil bei ihren Arbeiten, indem sie bei Ausführung dieser Schnecke alle Theile der krummen Linie schärfen und in gehörigen Schwung bringen können.

§. 183.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie aus vierundzwanzig Kreisbogen zusammenzusetzen.

Auflösung.

Von der gegebenen Schneckenhöhe **m p** (Fig. 191.), die man in sechs gleiche Theile getheilt hat, nehme man neun Theile für **a c** und für **a d** sieben solcher Theile. Mit einem Theile beschreibe man aus **a** einen Kreis, ziehe dann **c d** und schlage mit **a d** aus **d** den Bogen **a e**, nehme den Bogen **b e** und theile ihn in sechs gleiche Theile. Durch diese Theilpunkte ziehe man von **d** bis an **a c** die Linien **b d**, **f d**, **g d**, **h d**, **i d** und **k d** und theile dann jedes Sechstheil des Bogens **b e** in vier gleiche Theile, durch deren Theilpunkt man von **d** aus bis an **a c** gerade Linien zieht. Die **b d** wird hierdurch auch in vierundzwanzig Theile getheilt, welche von **b** gegen **c** zunehmen. Nach dieser Vorbereitung setze man **c a** von **m** nach **n** und beschreibe mit einem Theile, nämlich mit **o n** das Auge, ziehe durch dessen Mittelpunkt **n** die **r u** auf **m p** normal und ziehe dann die **q t** und **s v**, so daß dadurch die Peripherie des Auges in acht gleiche Theile getheilt wird. Nun nimmt man **a** 24 in den Zirkel, trägt diese Weite von **n** nach **m**, dann nimmt man **a** 23 in den Zirkel und trägt diese Länge von **n** nach **q**, beschreibt damit aus **q** und **m** zwei Bogen, welche sich in der Gegend des Mittelpunkts des Auges schneiden werden. Mit unveränderter Zirkelöffnung beschreibt man sofort aus diesem Durchschnittspunkte den Bogen **m q**. Ferner nimmt man **a** 22 in den Zirkel und trägt diese Weite von **n** nach **r**, beschreibt mit unverändertem Zirkel aus **q** und **r** wiederum zwei Kreisbogen, welche sich im Auge schneiden und schlägt aus diesem Durchschnittspunkte mit **a** 22 den Bogen **q r**. Eben so nimmt man nun **a** 21, setzt diese Länge von **n** nach **s**, beschreibt aus **r** und **s** mit **a** 21 zwei Bogen und schlägt dann aus deren Durchschnittspunkte mit **a** 21 den Bogen **r s**.

Auf ähnliche Art fährt man nun fort, die Bogen **s p** aus **a** 20, **p t** aus **a** 19, **t u** aus **a** 18, **u v** aus **a** 17, **v w** aus **a** 16, **w x** aus **a** 15 ꝛc. zu konstruiren, bis man endlich mit **a** 1 den Schluß macht.

Bei jedem Kreisbogen kann man leicht finden, ob richtig oder unrichtig konstruirt und gezeichnet wurde, und es ist auch jeder vorkommende Fehler bald verbessert.

§. 184.

Wer auf dem Papier die vorbeschriebene Schnecke zeichnen will, der thut gut, wenn er das Schneckenauge mit Tusche auszieht, die beiden Kreisbogen aber mit Bleistift zu ziehen und sie gleich nach deren Anwendung, sobald man nämlich aus ihrem Durchschnittspunkte den Schenkelbogen beschrieben hat, wegzureiben. Auch können die Bogen **m q**, **q r**, **r s**, **s p** ꝛc. (Fig. 191.) bald mit Tusche überzogen werden.

§. 185.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie im Großen mittels einer Schnur zu ziehen.

Auflösung.

Diese Aufgabe haben die Ziergärtner zuweilen zu lösen, weshalb sie hier ihren Platz finden mag.

Man lasse sich einen hölzernen Cylinder **a b** (Fig. 192.) von etwa einem Fuß im Durchmesser anfertigen, befestige an denselben eine Schnur, die lang oder kurz seyn kann, je nachdem man viel oder wenig Schneckengänge verlangt, und bringe an dem Ende dieser Schnur einen Stift oder Stab **d** an. Spannt man nun die Schnur mit dem Stabe **d** an, so daß sie z. B. in die Lage **c e** kommt und geht man behutsam mit dem Stabe an der angespannten Schnur um den Cylinder herum, so wird die Schnur sich um den Cylinder aufwinden und der Stab die Spirale beschreiben.

Eben so kann man, wenn zuvor die Schnur um den Cylinder aufgewunden ist, mit dem Stabe bei **c** anfangen, und wird dann, indem man die Schnur abwickelt, ebenfalls die Schneckenlinie gebildet werden, bei welcher die Grundfläche des Cylinders **a b** das Auge bildet.

Auch kann man statt des Cylinders einen Kegel nehmen und mit demselben ganz so, wie hier gezeigt wurde, verfahren; wobei man jedoch, wenn man nicht etwa Schneckengänge in die Oberfläche des Kegels geschnitten hat, die Schnur sehr behutsam aufwickeln muß, damit ihre Lagen dicht auf einander um den Kegel kommen.

Auflösung.

Von der gegebenen Schneckenhöhe **m p** (Fig. 191.), die man in sechs gleiche Theile getheilt hat, nehme man neun Theile für **a c** und für **a d** sieben solcher Theile. Mit einem Theile beschreibe man aus **a** einen Kreis, ziehe dann **c d** und schlage mit **a d** aus **d** den Bogen **a e**, nehme den Bogen **b e** und theile ihn in sechs gleiche Theile. Durch diese Theilpunkte ziehe man von **d** bis an **a c** die Linien **b d**, **f d**, **g d**, **h d**, **i d** und **k d** und theile dann jedes Sechstheil des Bogens **b e** in vier gleiche Theile, durch deren Theilpunkt man von **d** aus bis an **a c** gerade Linien zieht. Die **b d** wird hierdurch auch in vierundzwanzig Theile getheilt, welche von **b** gegen **c** zunehmen. Nach dieser Vorbereitung setze man **c a** von **m** nach **n** und beschreibe mit einem Theile, nämlich mit **o n** das Auge, ziehe durch dessen Mittelpunkt **n** die **r u** auf **m p** normal und ziehe dann die **q t** und **s v**, so daß dadurch die Peripherie des Auges in acht gleiche Theile getheilt wird. Nun nimmt man **a** 24 in den Zirkel, trägt diese Weite von **n** nach **m**, dann nimmt man **a** 23 in den Zirkel und trägt diese Länge von **n** nach **q**, beschreibt damit aus **q** und **m** zwei Bogen, welche sich in der Gegend des Mittelpunkts des Auges schneiden werden. Mit unveränderter Zirkelöffnung beschreibt man sofort aus diesem Durchschnittspunkte den Bogen **m q**. Ferner nimmt man **a** 22 in den Zirkel und trägt diese Weite von **n** nach **r**, beschreibt mit unverändertem Zirkel aus **q** und **r** wiederum zwei Kreisbogen, welche sich im Auge schneiden und schlägt aus diesem Durchschnittspunkte mit **a** 22 den Bogen **q r**. Eben so nimmt man nun **a** 21, setzt diese Länge von **n** nach **s**, beschreibt aus **r** und **s** mit **a** 21 zwei Bogen und schlägt dann aus deren Durchschnittspunkte mit **a** 21 den Bogen **r s**.

Auf ähnliche Art fährt man nun fort, die Bogen **s p** aus **a** 20, **p t** aus **a** 19, **t u** aus **a** 18, **u v** aus **a** 17, **v w** aus **a** 16, **w x** aus **a** 15 ꝛc. zu konstruiren, bis man endlich mit **a** 1 den Schluß macht.

Bei jedem Kreisbogen kann man leicht finden, ob richtig oder unrichtig konstruirt und gezeichnet wurde, und es ist auch jeder vorkommende Fehler bald verbessert.

§. 184.

Wer auf dem Papier die vorbeschriebene Schnecke zeichnen will, der thut gut, wenn er das Schneckenauge mit Tusche auszieht, die beiden Kreisbogen aber mit Bleistift zu ziehen und sie gleich nach deren Anwendung, sobald man nämlich aus ihrem Durchschnittspunkte den Schenkelbogen beschrieben hat, wegzureiben. Auch können die Bogen **m q**, **q r**, **r s**, **s p** ꝛc. (Fig. 191.) bald mit Tusche überzogen werden.

§. 185.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie im Großen mittels einer Schnur zu ziehen.

Auflösung.

Diese Aufgabe haben die Ziergärtner zuweilen zu lösen, weshalb sie hier ihren Platz finden mag.

Man lasse sich einen hölzernen Cylinder **a b** (Fig. 192.) von etwa einem Fuß im Durchmesser anfertigen, befestige an denselben eine Schnur, die lang oder kurz seyn kann, je nachdem man viel oder wenig Schneckengänge verlangt, und bringe an dem Ende dieser Schnur einen Stift oder Stab **d** an. Spannt man nun die Schnur mit dem Stabe **d** an, so daß sie z. B. in die Lage **c e** kommt und geht man behutsam mit dem Stabe an der angespannten Schnur um den Cylinder herum, so wird die Schnur sich um den Cylinder aufwinden und der Stab die Spirale beschreiben.

Eben so kann man, wenn zuvor die Schnur um den Cylinder aufgewunden ist, mit dem Stabe bei **c** anfangen, und wird dann, indem man die Schnur abwickelt, ebenfalls die Schneckenlinie gebildet werden, bei welcher die Grundfläche des Cylinders **a b** das Auge bildet.

Auch kann man statt des Cylinders einen Kegel nehmen und mit demselben ganz so, wie hier gezeigt wurde, verfahren; wobei man jedoch, wenn man nicht etwa Schneckengänge in die Oberfläche des Kegels geschnitten hat, die Schnur sehr behutsam aufwickeln muß, damit ihre Lagen dicht auf einander um den Kegel kommen.

§. 186.

Aufgabe.

Eine längliche Schneckenlinie durch Kreisbogen zu bilden.

Auflösung.

Man ziehe eine beliebig große gerade Linie **a b** (Figur 193.), errichte darauf in **a** das Loth **a c** und fälle von **b** den Perpendikel **b d**, beschreibe sowohl über, als unter **a b** die gleichseitigen Dreiecke **a b e** und **a b f** und lege an deren Spitzen **e** und **f** die horizontalen oder mit **a b** parallel gehenden Linien **h e** und **f g** doch so, daß jene von der Rechten gegen die Linke, diese von der Linken gegen die Rechte geht. Nun mache man die Linien **a c**, **h e**, **b d** und **f g** von willkürlicher Länge, nicht allzu groß, aber einander gleich und verlängere die Dreieckseiten **a e**, **b e**, **a f** und **b f**. Nach dieser Vorbereitung setze man in **g** (1) ein, öffne den Zirkel bis **a** und beschreibe damit den Bogen **a i**. Ferner beschreibe man aus **d** (2) mit **d i** den Bogen **i k**, dann aus **h** (3) mit **h k** den Bogen **l k** und eben so aus **c** (4) mit **c l** den Bogen **l m**. Nun fange man wieder bei 1 an und schlage daraus mit **g m** den Bogen **m n**; aus 2 schlage man mit **d n** den Bogen **n o**; aus 3 mit **h o** den Bogen **o p** und aus 4 mit **a p** den Bogen **p q**. Hierauf fängt die dritte Windung der Schnecke wieder bei 1 mit **g q** an, womit der Bogen **q r** konstruirt wird; dann kommt 2 ꝛc., wodurch der dritte Schraubengang geschlossen wird. Will man nun noch mehrere Windungen haben, so setze man das Bogenschlagen auf die hier beschriebene Art fort.

Bei der Vorbereitung zu dieser Konstruction muß man **a c**, **h e** ꝛc. nicht zu groß, niemals aber der **a b** gleich machen, weil dann die Punkte **c** und **h**, oder **g** und **d** in einander fallen würden.

Je kürzer **a c**, **h e**, **b i** und **f g** genommen wird, desto länglicher wird die Schnecke, andernfalls aber kreisförmig werden.

§. 187.

Aufgabe.

Eine Schneckenlinie von so viel Gängen, als man nur will, in einen Raum von bestimmter Höhe zu ziehen.

Auflösung.

Die gegebene Höhe **a g** (Fig. 194.) nehme man zum Durchmesser eines darum zu beschreibenden Kreises und theile die Peripherie desselben in eine beliebige Anzahl (allgemein in **n**) gleiche Theile. Bei der Bestimmung der Anzahl dieser Theile muß man zuvörderst eine gerade Zahl für **n** und dann eine recht große Zahl nehmen, weil von letzterm die Schönheit und Genauigkeit der Schneckenlinie abhängt. Nun bestimme man, wie viel Windungen die Schnecke erhalten soll, welche Anzahl = **p** seyn mag und merke das Produkt aus

n p.

Jetzt ziehe man von den Theilpunkten der Peripherie die Halbmesser und theile jeden derselben in **n p** gleiche Theile, ziehe den Punkt **a** mit dem ersten Theile der **c m**, den Punkt **1** mit dem zweiten Theile der **c l**, ferner den Punkt **2** mit dem dritten Theile der **c k** u. s. f. zusammen, wodurch eine Spirallinie von **p** Gängen erhalten wird.

Wollte man z. B. drei Gänge haben und die Kreisperipherie in zwölf gleiche Theile theilen, so muß jeder Halbmesser **a c, b c, n c, d c, e c, f c, g c, h c, i c, k c, l c** und **m c** in 3 × 12, das ist in 36 gleiche Theile getheilt werden.

Diese Schneckenlinie läuft stets im Mittelpunkte **c** des Kreises über **a g** aus und man kann ihr stets ein Auge von angemessener Größe geben.

Auch hier ist das §. 131 beschriebene Schwungholz mit Nutzen anzuwenden.

Achte Abtheilung.

Methoden, die Peripherie des Kreises ohngefähr zu rectificiren und den Kreis ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln.

§. 188.

Da die Rectification und die Quadratur des Kreises bis jetzt unmöglich ist, so hat man es versucht, Konstructionen zu finden, die ohngefähr denjenigen genügen, welche in der Ausübung des Rectificirens und Quadrirens etwa bedürfen.

Manche dieser Methoden sind schon recht genau, so wie dies bei der siebenten Auflösung des folgenden §. der Fall ist, welche ein Resultat gibt, das bis auf ein Zweihunderttausendtheil richtig ist.

§. 189.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser eines Kreises, folglich auch der Kreis gegeben, man soll eine gerade Linie zeichnen, welche (ohngefähr oder ziemlich genau) so groß ist, als die Peripherie dieses Kreises.

Erste Auflösung.

Man theile den Durchmesser **a b** (Fig. 195.) in **sieben** gleiche Theile und setze **zweiundzwanzig** derselben auf eine gerade Linie **cd**, welche dann der Peripherie ziemlich gleich ist.

Zweite Auflösung.

Man theile den gegebenen Durchmesser **ab** (Fig. 195.) mittels eines tausendtheiligen Maasstabs **in hundert** gleiche Theile und nehme deren **dreihundertundvierzehn** auf die gerade Linie **cd**, welche dann der Peripherie (ziemlich) gleich ist.

Dritte Auflösung.

Man theile den Durchmesser **a b** (Fig. 195.) in **einhundertunddreizehn** gleiche Theile und mache dann die **cd dreihundertfünfundfunfzig** solchen Theilen gleich.

Vierte Auflösung.

Man theile den Durchmesser **in zwölfhundertundfunfzig** gleiche Theile und gebe der die Peripherie repräsentirenden geraden Linie **dreitausendneunhundertundsiebenundzwanzig** derselben *).

---

*) Die erste Auflösung gründet sich auf das **Archimedische** Verhältniß 7:22; die andere auf das **Ludolphsche** 1:3,14159...; die dritte auf das **Metiussche** 113:355 und die vierte Auflösung stützt sich auf ein Verhältniß 1250:3927, welches vermuthlich älter, als das archimedische ist und in dem alten Werke: **Ayeen Abkery** enthalten ist. Außer diesen Verhältnissen kann man durch

Fünfte Auflösung.

Auf dem Durchmesser **a b** (Fig. 196.) errichte man in **c** den Halbmesser **c d** normal, ziehe die Diagonale **a d** und theile sie in fünf gleiche Theile. Trägt man nun den Durchmesser **a b** dreimal auf eine gerade Linie von **a** bis **e** und macht man **e g = a i**, nämlich einem Fünftel der **a d** gleich, so ist **f g** ziemlich so groß, wie die Peripherie des mit **a c** beschriebenen Kreises.

Sechste Auflösung.

Man setze die Durchmesser **a b** und **c d** (Fig. 197.) normal auf einander, ziehe die Diagonale **a c**, beschreibe mit **a c** aus **a** und **c** die Bogen **a f** und **a c**; ziehe **f i** und verbinde **d** mit **e** durch **d e**. Trägt man nun **d e** viermal auf eine gerade Linie von **g** bis **h**, so ist **g h** der Peripherie des mit **a i** beschriebenen Kreises gleich.

Siebente Auflösung.

Auf den Durchmesser **a b** (Fig. 198.) stelle man den Halbmesser **c d** lothrecht, halbire ihn in **e**, ziehe durch **b** und **e** die Sehne **b f** und fälle von **f** auf **a b** einen Perpendikel **f k**. Jetzt halbire man **c g** in **h**, nehme **f g** in den Zirkel und beschreibe damit aus **h** einen Bogen, welcher die **f k** in **i** schneidet. Macht man nun **k l = f k**, so ist **i l** der halben und **2 i l**, das ist **i m**, der ganzen Peripherie ziemlich gleich *).

Achte Auflösung.

Auf die unter einem rechten Winkel an einander gebrachten Halbmesser **a b** und **a c** (Fig. 210.) des gegebenen Kreises zeichne man eine Quadratrix **c d** (§. 18.), errichte in **d** auf **a b** das Loth **d e = a c** und **b** auf **a b** die Normale **b f**. Zieht man nun die Diagonale **a e** und verlängert man sie, bis das Loth **b f** in **f** getroffen wird,

---

Anwendung der Kettenbrüche aus der Ludolphschen Zahl, nämlich aus π, noch viele andere Verhältnisse entwickeln, wie z. B. 33102 : 103993; 33215 : 104348 u. s. w.

*) Setzt man bei dieser Konstruction **a c** = 0,5, so ist die gefundene Linie **i m** = 3,14161985; es ist demnach die Differenz aus dieser Zahl und der Zahl π = 0,0000272 ..., d. h. es ist die hier gefundene Linie um 0,0000272 zu groß: ein Fehler, der als nicht vorhanden betrachtet werden kann.

so ist bf dem vierten Theile der Peripherie des Kreises um a, der mit ab beschrieben ist, gleich und folglich ist

4 • bf = der Peripherie *).

§. 190.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie cd (Fig. 195.) gegeben, man soll den Halbmesser eines Kreises finden, dessen Peripherie dieser gegebenen Linie cd ziemlich gleich ist.

Erste Auflösung.

Man theile die gegebene Linie cd in vierundvierzig gleiche Theile und nehme deren sieben zum Radius. Beschreibt man nun damit einen Kreis, so ist dessen Peripherie der gegebenen Linie ziemlich gleich.

Andere Auflösung.

Theilt man die gegebene Linie cd (Fig. 195.) in zweiunzwanzig gleiche Theile und nimmt man deren sieben zu der Länge einer geraden Linie ab, so ist diese der Durchmesser eines Kreises, dessen Peripherie ziemlich so groß, wie cd ist.

Dritte Auflösung.

Man theile die gegebene Linie ab (Fig. 199.) in drei gleiche Theile, konstruire über einem Drittel derselben, etwa über ac, ein gleichseitiges Dreieck acd (§. 100), halbire dessen Seiten cd und ad in e und f, ziehe ae und ef, wodurch der Punkt g erhalten wird. Nun halbire man de in h, ziehe gh, theile diese Linie in vier gleiche Theile und mache $hi = \frac{gh}{4}$, nämlich einem solchen Theile gleich: es ist dann die gi der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie ziemlich so groß ist, wie die ab.

§. 191.

Aufgabe.

Einen gegebenen Kreis ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln.

---

*) Man sehe die Anmerkung zu §. 18.

Erste Auflösung.

Man theile den Durchmesser **ef** (Fig. 200.) in acht gleiche Theile, mache **ae** = **fb** = einem solchen Achtel; stelle **cd** lothrecht in **g** auf **ab** und mache **gc** = **gd** = **ag** = **bg**. Zieht man nun **ac**, **bc**, **bd** und **ad**, so ist **acbd** ein Quadrat, dessen Flächeninhalt dem Inhalte des gegebenen Kreises gleich ist *).

Andere Auflösung.

Die Durchmesser **ab** und **cd** (Fig. 201.) werden im Centrum normal an einander gebracht, **ad**, **bd**, **bc** und **ac** gezogen, wodurch man ein Quadrat **acbd** im Kreise erhält. Nun beschreibt man um denselben Kreis ein Quadrat **eghi**, dessen Seiten mit denen des zuerst gezeichneten parallel gehen, ziehe die Diagonalen **eh** und **ig**, halbire den Theil **de** der Diagonale **eh** in **f**, **ai** in **k**, **ch** in **l** und **bg** in **m**; ziehe durch die Punkte **f**, **m**, **l** und **k** die Linien **fm**, **lm**, **kl** und **fk**, wodurch das Quadrat **fmlk** gebildet wird, welches dem Inhalte des gegebenen Kreises ziemlich gleich ist **).

Dritte Auflösung.

Den Durchmesser **ab** (Fig. 202.) theile man in dreiundzwanzig gleiche Theile, verlängere ihn von beiden Seiten und trage von **g** aus bis **c** und **d** dreizehn solcher Theile. Beschreibt man nun mit **cg** einen Kreis und legt man ihn in das Quadrat **cedf**, so ist dieses der gegebenen Kreisfläche ziemlich gleich.

Vierte Auflösung.

An den Durchmesser **ab** (Fig. 203.) setze man bei **a** eine Normallinie **ad**, theile die **ab** in achtundzwanzig gleiche Theile und gebe achtundachtzig derselben der Linie **ac**, von **c** bis **d** aber trage man sieben solcher Theile. Beschreibt man nun über **ad** einen Halbkreis und errichtet man in **c** auf **ad** ein Loth **ce**, so ist dies die Seite des Quadrats **cefg**, dessen Flächeninhalt dem Inhalte des gegebenen Kreises ohngefähr gleich kommt.

---

*) Die Erfindung dieser Konstruction schreibt man dem berühmten Nürnberger Maler Albrecht Dürer zu.

**) Diese Konstruction soll nach Brison von Byzanz seyn.

Fünfte Auflösung.

Wenn **a d** (Fig. 210.) der Halbmesser des gegebenen Kreises ist, so messe man denselben auf irgend einem Maasstab und berechne nach

$$\mathbf{ab} = \frac{\mathbf{a\,d}\,\pi}{2}$$

die Länge **a b**, nehme sie von dem gedachten Maasstab ab und mache $\mathbf{dg} = 2\mathbf{ad}$. Nun trage man die für **a b** gefundene Länge von **d** nach **e** und beschreibe über **e g** einen Halbkreis. Wird endlich in **d** auf der **e g** ein Loth **d h** bis an die Peripherie des Halbkreises gezogen, so ist dieses die Seite des dem Kreise gleichen Quadrats: es ist nämlich

$$\mathbf{dh}^2 = (\mathbf{ad})^2\,\pi.$$

§. 192.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser eines Kreises zu finden, dessen Flächeninhalt dem Inhalt eines gegebenen Quadrats gleich ist.

Erste Auflösung.

Wenn **a c b d** (Fig. 200.) das gegebene Quadrat ist, so ziehe man dessen Diagonalen **a b** und **c d**, theile eine derselben (etwa **a b**) in zehn gleiche Theile und beschreibe aus **g** mit vier solchen Theilen einen Kreis: es ist sodann die Fläche dieses Kreises der des gegebenen Quadrats gleich.

Andere Auflösung.

Wenn **c e d f** (Fig. 202.) das gegebene Quadrat ist, so ziehe man, wie bei der ersten Auflösung dieser Aufgabe, dessen Diagonalen **c d** und **e f** und theile eine derselben in sechsundzwanzig gleiche Theile. Beschreibt man nun aus **g** mit eilf und einem halben dieser Theile einen Kreis, so ist dessen Flächeninhalt dem Inhalte des gegebenen Quadrats gleich.

§. 193.

Obschon die Aufgaben der §§. 191 und 192 eigentlich zu der Verwandlung der Figuren gehören, welche der zweite Abschnitt dieses Werks enthält, so wurden sie den-

noch hier abgehandelt, da es nicht unrichtig seyn mag, sie den Rectificationsmethoden des Kreises anzuschließen. Dasselbe gilt auch von den noch folgenden Aufgaben dieser Abtheilung.

§. 194.

Aufgabe.

Einen Kreis zu konstruiren, dessen Fläche der eines gegebenen Halbkreises gleich ist.

Auflösung.

Auf dem Durchmesser **ab** (Fig. 204.) des gegebenen Halbkreises errichte man im Mittelpunkte **c** den Halbmesser **cd** lothrecht, ziehe **db** und halbire sie in **e**. Wird nun aus **e** mit **be** ein Kreis beschrieben, so ist dessen Fläche dem Flächeninhalte des gegebenen Halbkreises **vollkommen** gleich.

§. 195.

Aufgabe.

Einen Halbkreis zu zeichnen, dessen Flächeninhalt dem Inhalte eines gegebenen Kreises gleich ist.

Auflösung.

Der gegebene Kreis ist **bcdf** (Fig. 204.). Man ziehe den Durchmesser **bd** des gegebenen Kreises, theile die halbe Peripherie **bcd** bei **c** in zwei gleiche Theile, ziehe **bc** und verlängere diese Linie, bis **ac = bc** wird. Beschreibt man nun über **ab** aus **c** mit **bc** einen Halbkreis **abd**, so ist sein Areal dem Flächeninhalte des gegebenen Kreises **bedf** um **e vollkommen** gleich.

§. 196.

Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, der einer Ringfläche vollkommen gleich ist.

Auflösung.

Wenn **ac** und **bc** (Fig. 205.) die Halbmesser der Ringfläche sind, so errichte man in **b** auf **ac** das Loth **be**: es ist dies der Radius eines der Ringfläche vollkommen gleichen Kreises.

Bayerische Staatsbibliothek München

§. 197.

Aufgabe.

Einen Halbkreis zu beschreiben, dessen Flächeninhalt einer gegebenen Ringfläche gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe **a c** (Fig. 206.) und mache **b d** lothrecht auf **a c** in **b** und **b e = b d**, ziehe **e d** und verlängere sie, bis **d g = e d** geworden ist. Beschreibt man nun über **g e** einen Halbkreis **g f e**, so ist dessen Flächeninhalt der gegebenen Ringfläche gleich.

§. 198.

Wendet man bei Vorstehendem das in §. 191 Gelehrte an, so kann sehr leicht ein Halbkreis und eine Ringfläche in ein Quadrat verwandelt werden; und eben so kann man Halbkreise konstruiren, die einem gegebenen Quadrate gleich sind.

Neunte Abtheilung.

Konstruction der Proportionallinien.

§. 199.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie **a b** (Fig. 207.) bei **c** dergestalt in zwei ungleiche Theile zu theilen, daß sich das kleinere Segment **a c** zum größern **b c** verhalte, wie dieses zur ganzen Linie.

Es soll nämlich seyn:

$$ac : bc = bc : ab.$$

Erste Auflösung.

An dem einen Endpunkte **a** der gegebenen Linie **a b** errichte man ein Loth $ae = ad = \frac{ab}{2}$; ziehe **b e** und beschreibe aus **e** mit **a e** den Bogen **a f**. Beschreibt man nun aus **b** mit **b f** den Bogen **c f**, bis er die **a b** in **c** schneidet, so ist **c** der gesuchte Punkt und **a c** nebst **b c** sind verlangte Theile der **a b**, bei welchen

$$ac : bc = bc : ab.$$

statt findet.

Bayerische Staatsbibliothek München

Andere Auflösung.

Man mache b e (Fig. 208.) auf a b normal und so groß, wie die a b, verlängere a b, bis $b\,d = \frac{a\,b}{2}$ wird. Zieht man nun d e und beschreibt man mit d e aus d den Bogen c e, bis er die a b in c schneidet, so sind a c und b c die Segmente der a b von der verlangten Eigenschaft. Es ist nämlich:

$$a\,c : b\,c = b\,c : a\,b \text{ *).}$$

§. 200.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien a b und c d (Fig. 209.) eine mittlere Proportionale zu finden.

Auflösung.

Man mache $e\,f = a\,b$, verlängere sie, bis $f\,g = c\,d$ wird und beschreibe über e g einen Halbkreis e h g. Wird nun in f auf e g ein Loth f h bis an die Peripherie errichtet, so ist dieses das geometrische Mittel zwischen a b und c d; es ist dann:

$$c\,d : f\,h = f\,h : a\,b.$$

§. 201.

Durch die Konstruction des vorigen §. kann man aus jeder Größe die Quadratwurzel geometrisch vollkommen genau ausziehen. Es sey z. B. die Linie a b (Fig. 209.) zu diesem Behufe gegeben, so messe man ihre Länge auf irgend einem Maasstab und trage sie von e bis f, nehme von dem Maasstabe die Einheit — womit a b gemessen wurde — trage sie von f nach g, beschreibe über e g den Halbkreis e h g und errichte die Normale f h in f auf e g; wodurch dann

$$f\,h = \sqrt{a\,b}$$

ist.

---

*) Dieses Problem war bei den Alten sehr berühmt, es hieß: „sectio divina“ und die Aufgabe selbst wurde gestellt: lineam rectam, media et extrema ratione secare; d. h. eine gerade Linie nach dem mittlern und äußern Verhältnisse zu theilen.

§. 202.

Aufgabe.

Zu zwei geraden Linien **a b** und **c d** (Fig. 211.) die dritte Proportionale zu finden; d. h. es soll

a b : c d = c d : h i

werden.

Auflösung.

Man zeichne einen beliebigen Winkel **e**, trage auf dessen Schenkel **e g** von **e** an die **a b** bis **f**, mache dann **f g**, so wie **e h = c d**. Zieht man nun **f h** und mit dieser Linie die **g i** parallel bis der andre Schenkel **e i** des Winkels **e** in **i** geschnitten wird, so ist **h i** die dritte Proportionirte und es steht:

a b : c d = c d : h i.

§. 203.

Aufgabe.

Zu drei Proportionallinien **a, b** und **c** (Figur 212.) die vierte Proportionale zu finden.

Auflösung.

Man zeichne einen beliebig großen, aber spitzen Winkel **e**, mache **e g** gleich der gegebenen Linie **a**, **i g = b** und **e h = c**. Zieht man nun **g h** und macht man **i k # g h**, so ist **h k** die vierte Proportionale zu **a, b** und **c**; es ist nämlich:

a : b = c : h k.

§. 204.

Aufgabe.

Zu zwei geraden Linien **a** und **d** (Fig. 213.) zwei mittlere Proportionallinien **b** und **c** zu finden; es muß nämlich

a : b = c : d

werden.

Auflösung.

Man bringe die beiden gegebenen Linien **a** und **d** unter einem rechten Winkel an einander, mache z. B. **e f = a** und **f h = d**; ziehe **g h # e f** und **g e # f h**. Ferner verlängere man die **e f** und die **f h**, mache **f i = e f**

und ziehe die Diagonalen **e i** und **e h**. Nun beschreibe man aus **e** mit **e h** den Bogen **h k**, trage **i k** von **h** nach **l** und mache **l m = f h**. Zieht man nun durch **m** und **g** die **m n**, so ist **m h = b** die eine und **n e = c** die andre der gesuchten zwei mittlern Proportionalen.

Wird übrigens noch **f g** gezogen, so ist **o** der Mittelpunkt des Bogens **m p n**, welcher so gesucht werden müsse, wenn nämlich vorstehendes Verfahren nicht bekannt wäre, daß seine Sehne **m n** auch den Punkt **g** berührt.

§. 205.

Aufgabe.

Die vorige Aufgabe mit Hilfe zweier Winkelhaken zu lösen.

Auflösung.

Wenn **a** und **d** (Fig. 214.) die gegebenen Linien sind, so verbinde man sie wie **b c** und **c e** unter einem rechten Winkel **b c e**, so daß **b c = a** und **c e = d** werde. Nun bringe man die Winkelhaken dergestalt an einander, daß deren Schenkel **f** und **g** in die Verlängerung der Schenkel **e c** und **b c** fallen und daß die innere Seite des Winkelhakens **A** genau an die äußere Kante des Winkelhakens **B** fällt, und daß ferner die äußere Kante von **B**, so wie die innere von **A** zugleich durch die Punkte **b** und **e** geht. Hat man die Winkelhaken in diese Lage gebracht, so ist **c f** die eine und **c g** die andere der beiden mittlern Proportionirten zwischen **a** und **d**; es ist nämlich:

a : c f = c g : d.

§. 206.

Aufgabe.

Aus der mittlern Proportionale a (Fig. 215.) **zweier Linien und aus der Differenz b derselben diese Linie selbst zu finden.**

Auflösung.

Man ziehe eine Linie **c d**, trage auf sie die Linie **b** von **e** bis **f**, errichte in **f** auf **e f** einen Perpendikel **f g = a**; halbire **e f** in **h**, ziehe **g h** und beschreibe aus **h** mit **g h** den Halbkreis **c g d**: es ist dann **c f** die eine und **d f** die andere der äußern Proportionirten zu **a**. Es ist nämlich:

c f : a = a : d f und es ist auch:

b = c f — d f.

§. 207.

Aufgabe.

Die Summe a zweier äußern Proportionirten und die mittlere Proportionale d derselben sind gegeben; man soll die äußern Proportionirten selbst finden.

Auflösung.

Man mache ab = a (Fig. 216.), beschreibe darüber aus h einen Halbkreis afb, errichte am Ende b der ab ein Loth bc, trage darauf d von b bis e und ziehe ef # ab. Fällt man nun von f auf die ab einen Perpendikel fg, so wird die ab von ihm in g geschnitten und es sind dann die Segmente ag und bg die äußern proportionirten Linien zu d; es ist nämlich

ag : d = d : bg.

§. 208.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie ab (Fig. 217.) gegeben, man soll von derselben ein Stück (ad) so abschneiden, daß es die mittlere Proportionirte zwischen dem übrigbleibenden Theil db und einer andern gegebenen Linie c sey.

Auflösung.

Man mache eh = ab und hf = c, beschreibe über ef einen Halbkreis eif, errichte in h auf ef das Loth hi, halbire hf in k, ziehe ik und beschreibe damit aus k einen Bogen il, welcher die ef in l schneidet und wodurch lh (die gesuchte Linie ad) erhalten wird. Schneidet man lh = ad von ab ab, so ist

bd : ad = ad : c.

§. 209.

Aufgabe.

Es sind zwei Linien a und b (Fig. 218.) gegeben, man soll jede derselben dergestalt in zwei solche Theile theilen, daß diese Theile unter sich proportionirt sind.

Auflösung.

Die größere Linie a trage man von e nach f und bringe die kleinere b = eg unter einem rechten Winkel

mit ef an e; beschreibe über ef einen Halbkreis, ziehe fg und durch den Punkt i lege man il # ef und ik # eg. Hierdurch erhält man von eg = b die Segmente gl und le und von a = ef die Segmente ek und fk, welches die gesuchten Theile sind; denn es steht

fk : ek = el : gl.

§. 210.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen Linie ab (Fig. 219.) zwei Rechtecke zu zeichnen, die sich wie zwei gegebene Linien c und d verhalten.

Auflösung.

An die gegebene Linie ab lege man die ah unter einem beliebigen spitzen Winkel hab, mache darauf ae = c und ef = d. Verbindet man nun b mit f und zieht man eg # bf, so erhält man auf ab den Punkt g, aus welchem man die Normale kg errichtet, mit welcher al und bi parallel gemacht werden. Wird endlich die li in beliebiger Höhe über ab und parallel mit dieser Linie gezogen, so erhält man zwei Rechtecke agkl und bgki, welche sich verhalten, wie die gegebenen Linien c und d.

§. 211.

Aufgabe.

Der Unterschied zwischen der Diagonale und der Seite eines Quadrats ist gegeben, man soll die Seite selbst finden.

Auflösung.

Wenn die Linie ab (Fig. 220.) der gegebene Unterschied ist, so errichte man in a auf demselben ein Loth ca = ab, ziehe bc, verlängere sie und beschreibe aus c mit ac einen Bogen ad, welcher die gedachte Verlängerung in d trifft und die gesuchte Seite durch bd bestimmt. Endlich verlängere man ab, mache ae = bd, ziehe de und vollende das Quadrat defb.

§. 212.

Aufgabe.

Jede gegebene Figur abcdef (Fig. 221.) nach einem bestimmten Maasstabe zu vergrößern oder zu verkleinern.

Auflösung.

Man messe eine Seite **a b** der gegebenen Figur auf dem ihr zugehörenden Maasstabe **A** und nehme eben so viel Theile, als diese Linie enthält, vom Maasstabe **B**, welcher zur neuen Figur gehört und trage sie auf **g h**. Nun zerlege man die gegebene Figur in Dreiecke, indem man die Linien **b f, b e, b d** und **b c** zieht. Diese Dreiecke trage man nun in ihrer Ordnung nach einander verjüngt an **g h**, indem man jede Seite derselben auf **A** mißt, dies Maas auf **B** abnimmt und die Seiten der Dreiecke der neuen Figur nach und nach zeichnet. Dadurch werden die Dreiecke der verjüngten Figur ähnlich werden denen der gegebenen und folglich muß auch **g h i k l m ∽ a b c d e f** seyn.

§. 213.

Aufgabe.

Eine gegebene Figur **a b c d e f g h** (Fig. 222.) aus einem innerhalb derselben liegenden Punkte **r** zu verjüngen.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkte **r** ziehe man an alle Figurenwinkel gerade Linien **a r, b r, c r, d r, e r, f r, g r** und **h r**; messe eine dieser Linien, z. B. **a r**, und merke das Maas derselben.

Soll nun die Figur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{n}$tel mal so groß, als die gegebene Figur werden, so multiplicire man das so eben gefundene Maas von **a r** mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder mit $\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder mit $\sqrt{\frac{1}{4}}$ oder mit $\sqrt{\frac{1}{n}}$, nehme so viel Einheiten vom Maasstab, als dies Produkt angibt und trage die Länge auf **a r** und zwar von **r** nach **q**. Legt man nun durch **q** die **q i ∥ a h**, durch **i ∥ i k ∥ g h**, durch **k** die **k l ∥ f g** u. s. f., so erhält man die Figur **i k l m n o p q**, welche der gegebenen Figur ähnlich und von derselben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... oder $\frac{1}{n}$tel seyn wird.

§. 214.

Aufgabe.

Eine geradlinige Figur **a b c d e f g h r** (Fig. 223.) aus einem in derselben liegenden Winkel **r** zu verjüngen.

Auflösung.

Man ziehe **br, cr, dr** ꝛc., messe eine Seite **ar** der Figur und multiplicire dieses Maas mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ .... $\sqrt{\frac{1}{n}}$, je nachdem die Figur die Hälfte, ein Drittel oder ein **n**tel der gegebenen Figur seyn soll und nehme dies Produkt vom Maasstabe, trage diese Länge von **r** nach **q** und lege **qp** durch **q** # **ab**. Ferner mache man **po** # **bc**, **on** # **cd** u. s. f., bis die Figur **iklmnopqr** geschlossen ist.

§. 215.

Aufgabe.

Eine geradlinige Figur **abcdef** (Fig. 224.) aus einem außerhalb der Figur liegenden Punkt **o** zu verjüngen.

Auflösung.

Nach **o** ziehe man von allen Figurenwinkeln die geraden Linien **ao, bo, co, do** ꝛc., messe eine dieser Linien, z. B. **ao**, auf dem Maasstabe der gegebenen Figur und berechne, wie §. 212 und 213 gezeigt wurde, wie groß **og** genommen werden muß. Diese Weite trage man **ab** und lege durch **g** die **gm** # **af** und die **gh** # **ab**; ferner ziehe man durch **h** die **hi** # **bc**, dann **ik** # **ed**, **kl** # **de** und endlich **lm** # **ef**. Man erhält hierdurch eine Figur **ghiklm**, welche der **abcdef** ähnlich und $\frac{1}{n}$tel derselbe ist.

§. 216.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt **a** (Fig. 225.) außerhalb einer geraden Linie **bc** gegeben, man soll von diesem Punkt an die **bc** eine Linie **ah** oder **ai** ziehen, welche mit der kleinsten Entfernung des Punkts **a** von **bc**, das ist mit **ad** ein bestimmtes Verhältniß, z. B. 4 : 3 hat.

Auflösung.

Durch **a** ziehe man auf die **bc** das Loth **dg** und lege an **d** eine Linie **dk**, so daß sie mit **dg** einen spitzen Winkel macht. An diese **dk** trage man nun von **d** nach **e** so viel gleiche Theile, als wie viel Einheiten die **kle**-

nere Verhältnißzahl hat; hier also drei und von e setze man bis f so viele dieser Theile, als wie viele Einheiten die größere Verhältnißzahl hat: hier also vier. Nun verbinde man a mit e und mache fg # ae. Beschreibt man nun aus a mit ag einen Kreis, so wird dadurch die bc in h und i geschnitten und es sind die Punkte i und h bestimmt, durch welche die Linien ah und ai gezogen werden, welches die verlangten Linien sind. Es ist nämlich:

$$ad : ah = 3 : 4 \text{ oder}$$
$$ad : ai = 3 : 4.$$

§. 217.

Aufgabe.

Es ist ein Viereck abcd (Fig. 226.) und in einer Seite ab desselben ein Punkt e gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Linie ex ziehen, welche die Seite cd dergestalt theilt, daß

$$ab : be = cd : dx$$

wird.

Auflösung.

Man ziehe af # cd und cf # ad. Ferner ziehe man af und bf und mache ey # bf. Zieht man nun dy und durch f die xf # dy, so erhält man den Punkt x, der so liegt, daß, wenn man durch ihn und durch e die ex legt,

$$ab : be = cd : dx$$

wird.

§. 218.

Aufgabe.

Von einem außerhalb eines Kreises um o (Fig. 227.) liegenden Punkt a soll eine Sekante ax dergestalt gezogen werden, daß ihr äußeres Segment ay von der ganzen Sekante ax der $\frac{m}{n}$te Theil ist, daß nämlich

$$ay : ax = m : n$$

werde; oder daß sich ay und ax zu einander verhalten, wie zwei gegebene Linien m und n.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkt a ziehe man eine beliebige Sekante ap; trage die gegebene Linie m von a nach

d und n von a nach e; ziehe b d und mache e f # b d. Ueber a f beschreibe man einen Halbkreis (lege ihn jedoch nicht in die Gegend der a p), errichte in c auf a f ein Loth c z, ziehe a z und beschreibe damit aus a den Bogen x z, durch welchen die Peripherie des gegebenen Kreises in x getroffen wird. Zieht man nun a x, so ist dies die verlangte Sekante und es wird dann

$$a y : a x = m : n$$

seyn.

§. 219.

Aufgabe.

Es ist ein Kreisbogen a x b (Fig. 228.) gegeben, man soll in denselben zwei Sehnen a x und b x legen, die sich unter irgend einem Winkel treffen und sich wie zwei gegebene Linien m und n verhalten.

Auflösung.

Man ziehe die Sehne a b und theile sie bei e dergestalt, daß

$$a e : b e = m : n$$

wird. (§. 16.)

Nun ergänze man die Peripherie des Kreises (§. 27) und errichte auf der Sehne a b in ihrem Halbirungspunkte d einen Perpendikel d c, wodurch die Peripherie in c berührt wird. Zieht man nun durch c und e eine gerade Linie c x bis an den Kreis und zieht man a x und b x, so sind dies die verlangten Sehnen, bei denen folgende Proportion stattfindet:

$$a x : b x = m : n.$$

§. 220.

Aufgabe.

Zwischen die Peripherien zweier gegebenen concentrischen Kreise ein Dreieck zu legen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Auflösung.

Man lege das gegebene Dreieck a b c (Fig. 229.) so an einen Radius der gegebenen Kreise, daß die Spitze c in das Centrum fällt, ziehe c e # a b und mache die Sehne d e auf a f rechtwinklig. Ueber diese Sehne beschreibe man nach §. 245 einen Kreisbogen, welcher den

Winkel **b c f** enthält: er wird den innern Kreis in **g** schneiden. Zieht man nun von **d** durch den Durchschnittspunkt **g** die Sehne **d h**, dann die Sehne **e h** und endlich die **e g**, so ist das Dreieck **e g h** ∽ dem Dreiecke **a b c** und es liegt zwischen den Peripherien der gegebenen concentrischen Kreise.

§. 221.

Aufgabe.

Ein Rechteck zu konstruiren, dessen Hälfte dem Ganzen ähnlich ist *).

Auflösung.

Es sey **a b** (Fig. 230.) die gegebene Länge des Rechtecks, dessen Breite gesucht wird. Man mache **a c = a b** und lothrecht auf **a b** in **a**, ziehe **b c**, halbire sie in **d**, mache **b e** normal in **b** auf **a b** und trage **b d** von **b** nach **e**. Fällt man nun von **d** auf **a b** das Loth **h g** und macht man **e f # a b**, so ist **a b e f** das gesuchte Rechteck und es wird:

a b e f ∽ b e h g

seyn.

§. 222.

Aufgabe.

Zwei Dreiecke oder zwei andere ähnliche Figuren zu zeichnen, welche sich wie zwei gegebene gerade Linien **a** und **b** (Fig. 231.) verhalten.

Auflösung.

Man nehme die größere Linie **a**, trage sie von **e** nach **f** und mache **f g = b**. Nun beschreibe man über **e f** einen Halbkreis und errichte in **g** auf **e f** den Perpendikel **g h** und ziehe **f h**. Ueber **b** zeichne man ein Dreieck **i k l** oder jede andere bestimmte Figur, in welcher **i l = b** ist, verlängere **i l**, bis **i m = f h** wird. Legt man nun durch **m** die **m n # k l** und verlängert man **i k** bis **n**, so ist

△ i m n : △ i k l = a : b.

---

*) Arithmetisches Handbuch ꝛc. Breslau 1833, bei E. Pelz. §. 397.

§. 223.

Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, in welchem jeder der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der dritte Winkel an der Spitze.

Auflösung.

Wenn **a b** (Fig. 232.) einer der gleichen Schenkel des Dreiecks ist, so schneide man ihn nach §. 199 nach dem mittlern und äußern Verhältniß, man verlängere nämlich **a b** bis **b d** $= \frac{\mathbf{a\,b}}{2}$ wird, beschreibe aus **b** mit **a b** den Bogen **a g e** und errichte in **b** auf **a b** das Loth **b e**. Zieht man nun **d e** und beschreibt man aus **d** mit **d e** den Bogen **e f** und trägt man **b f** von **a** nach **g**, so ist, wenn **a g** und **b g** gezogen werden, **a b g** das verlangte gleichschenklige Dreieck, in welchem

b a g = b g a = 2 a b g ist.

§. 224.

Aufgabe.

Einen transversal oder sogenannten tausendtheiligen Maasstab zu zeichnen.

Auflösung.

Man nehme eine gerade Linie **a c** (Fig. 233.), theile sie in zehn gleiche Theile, errichte in **a** und **c**, so wie in allen Theilpunkten Lothe **a b**, **e f** ꝛc. auf **a c**, gebe diesen Lothen einerlei Höhe **a b**, die übrigens willkürlich ist und gewöhnlich ein- oder zweimal größer, als ein Zehntel **a e** von der **a c** gemacht wird und ziehe **b d** ∥ **a c**. Jetzt theile man **a b** in zehn gleiche Theile und ziehe durch jeden Theilpunkt eine Parallele mit **a c**. Endlich theilt man auch **a e** und **b f** in zehn gleiche Theile, zieht **e** und **g**, ferner 2 und **h**, 3 und **i** ꝛc. durch gerade schrägliegende Linien **e g**, 2 **h**, 3 **i** ꝛc. zusammen. Nachdem dies geschehen, setze man an die Theilpunkte Ziffern von 1 bis 10, wie die Figur zeigt.

Auf diesem Maasstabe ist **n o** ein Zehntel von **1 e**, **p q** drei Zehntel von **1 e**, **r s** ein Zehntel von **e i** und folglich muß es einleuchtend seyn, weshalb z. B. **k m** von **a c** genau $23\frac{2}{10}$ Hundertel oder 232 Tausendtel ausmacht.

Zehnte Abtheilung.

Konstruction der Dreiecke aus ihren Seiten und Winkeln.

§. 225.

Aufgabe.

Aus den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels **c e d** (Figur 234.) setze man die gegebenen Katheten dergestalt, daß sie an dem Scheitel d an einander kommen, daß nämlich **c d = a** und **d e = b** wird. Zieht man nun **c e**, so ist **c d e** das verlangte rechtwinklige Dreieck.

§. 226.

Aufgabe.

Es sind zwei ungleich große Linien **a** und **b** (Fig. 235.) gegeben; man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruiren, in welchem die größere a dieser Linien die Hypothenuse, die kleinere b aber eine Kathete wird.

Auflösung.

Man entwerfe einen rechten Winkel **d c e**, mache dessen Schenkel **c e** der kleinern gegebenen Linie **b** gleich; setze in e den Zirkel ein, fasse damit die **a** und beschreibe damit einen Bogen **g h**, welcher die **c d** in **f** schneiden wird. Zieht man nun **e f**, so ist **c e f** das verlangte rechtwinklige Dreieck.

§. 227.

Aufgabe.

Es ist die Summe **a** (Fig. 236.) zweier Dreiecksseiten und die dritte Seite **b**, nebst einem an **b** nur an einer die Summe mitbildenden Seite liegenden Winkel α gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Man zeichne einen Winkel **a b c** = α, mache den Schenkel **b c = b** und **a b = a**, ziehe **a c**, halbire sie

in d, errichte in d auf ac das Loth df und ziehe cf: es ist dann das Dreieck bcf das verlangte.

§. 228.

Aufgabe.

Die Basis a eines Dreiecks, ein an derselben liegender Winkel α, so wie die Differenz d der beiden andern Seiten sind gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Man mache bc = a (Fig. 237.), lege an c den Winkel α, mache cd = d und abd = adb. Zieht man nun ab so lang, bis davon die Verlängerung von cd in a getroffen wird, so ist △abc das Verlangte.

§. 229.

Bei der vorstehenden Aufgabe ist ac > ba; im Fall nun aber ac < ba ist, so findet folgende Auflösung statt:

Man mache bc = a (Fig. 238.), acb = α, verlängere ac, bis cd = d wird, ziehe bd und mache abd = adb. Man erhält dadurch das Dreieck abc, welches das verlangte ist.

§. 230.

Aufgabe.

Die Differenz d zweier Seiten, die dritte Seite b und der ihr gegenüber liegende Winkel α sind gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung.

Man zeichne einen rechten Winkel deb (Fig. 239.), mache $dec = \frac{\alpha}{2}$ (gleich der Hälfte des gegebenen Winkels α), verlängere den Schenkel ce, bis ae = d wird, setze in a ein und beschreibe mit der Seite b einen Bogen, welcher den Schenkel be in b schneiden wird. Macht man nun cbe = ceb und verlängert man die Schenkel dieser Winkel, bis sie sich in c schneiden, so ist abc das gesuchte Dreieck.

§. 231.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie **a** eines Dreiecks, aus dessen Höhe **h** und aus dem der Basis gegenüber liegenden Winkel α das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Man mache **a b** = **a** (Fig. 240.), halbire sie in **d**, setze an die **a b** den Winkel **b a c** = α und errichte sowohl in **d** auf **a b**, als auch in **a** auf **a c** die Lothe **d f** und **a m**. Ferner mache man **d f** = **h** und ziehe **e g** ∥ **a b**. Beschreibt man nun durch **m** mit **a m** einen Kreis, so wird er die **e g** in **e** und **g** schneiden und es ist dann, wenn **b e** und **a e** gezogen werden, **a b e** das verlangte Dreieck, in welchem **a e b** = α, die Höhe = **h** und die Basis = **b** ist.

Man könnte auch **b g** und **a g** ziehen, wodurch ein Dreieck **a b g** erhalten würde, welches die verlangten Eigenschaften hat.

§. 232.

Aufgabe.

Aus der Summe **s** zweier Seiten eines Dreiecks, aus der dritten Seite **a** desselben und aus dem ihr gegenüber stehenden Winkel α das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Die gegebene Summe **s** trage man von **b** nach **d** (Fig. 241.), mache **b d c** = $\frac{\alpha}{2}$ (= der Hälfte des gegebenen Winkels), nehme die Seite **a** in den Zirkel und beschreibe damit aus **b** einen Kreis, welcher die **c d** in **c** schneidet. Wird nun **a c d** = **a d c** = $\frac{\alpha}{2}$ gemacht und **a c** gezogen, so ist **a b c** das verlangte Dreieck, in welchem **b a c** = α ist.

§. 233.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie **b** (Fig. 242.) eines Dreiecks, aus dem Unterschiede α beider Win-

kel an denselben und aus der Differenz d der beiden andern Seiten das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

An a c trage man die Grundlinie b, mache e a c = $\frac{\alpha}{2}$, beschreibe aus c mit d einen Bogen, welcher die a g in e schneidet *), verlängere c e und mache b a e = a e b; es ist sodann, wenn man die Schenkel dieser Winkel so weit verlängert, daß sie sich in f schneiden, a c f das gesuchte Dreieck.

§. 234.

Aufgabe.

Es sind der Scheitelwinkel α eines Dreiecks, so wie die Segmente a und b gegeben, welche entstehen, wenn man von dem Scheitel des Winkels α Lothe auf die Basis fällt; man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Die gegebenen Segmente a und b trage man auf b c (Fig. 243.) dergestalt, daß b f = a und c f = b werde. Nun beschreibe man über b c einen Kreisbogen b a c, welcher den Winkel α enthält (§. 245.), errichte in f auf b c ein Loth a f bis an den Bogen b a c, ziehe a b und a c und es ist sodann a b c das verlangte Dreieck **).

§. 235.

Aufgabe.

Die Höhe h eines Dreiecks, der Scheitelwinkel α desselben, so wie das Verhältniß m : n der Segmente der Grundlinie, welche durch das

---

*) Findet dieses Schneiden nicht statt, ist c d zu kurz, so ist die Aufgabe unmöglich.

**) Sind die Segmente nicht selbst, sondern nur ihr Verhältniß m : n zu einander gegeben, so setze man auf eine gerade Linie b c (Fig. 243.) die Linien m und n an einander und konstruire wie zuvor. Zieht man nun durch einen beliebig gewählten Punkt d in der Verlängerung die a b die d e ∦ b c, so wird a d e ein Dreieck seyn, in welchem, wenn man a f bis g verlängert, d g : g e = m : n und d a e = α ist.

Loth vom Scheitel auf dieselbe gebildet werden, sind gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Die gegebene Verhältnißlinie **m** und **n** trage man auf **a c** (Fig. 244.), indem man **a b = m** und **b c = n** macht. Auf **a c** setze man einen Kreisbogen **a d c**, der den Winkel α enthält (§. 245.), verlängere **b d**, bis **d e = h** geworden ist und ziehe durch **e** die **f g # a c**. Verlängert man nun die **a d**, ferner die **c d**, bis die **f g** in **f** und **g** geschnitten wird, so ist **d f g** das verlangte Dreieck.

§. 236.

Aufgabe.

Der Scheitelwinkel α eines Dreiecks, eine an diesem Winkel liegende Seite **a** und das Verhältniß **m : n** der Segmente der Basis sind gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Auf **b c** (Fig. 245.) mache man **b d = m** und **c d = n**, den Bogen **b e c** aber konstruire man so, daß er den Winkel α enthalte (§. 245.); ferner ziehe man **b e** und **e c**, verlängere die **b e**, bis **e f = a** wird, ziehe durch **f** die **f g # b c**, so ist, wenn **c e** bis **g** verlängert wird, **e f g** das Dreieck, in welchem **f e g =** α, **e f = a** und

f h : g h = m : n ist.

§. 237.

Aufgabe.

Die Höhe und Grundlinie eines Dreiecks, nebst dem ihr anliegenden Winkel sind gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung.

Man ziehe die Grundlinie **a b** (Fig. 246.), errichte auf ihr in **a** und **b** Lothe **a d** und **b e**, mache sie gleich der Höhe **b e**, ziehe **d e** und mache **f a b =** dem gegebenen Winkel α. Wird nun **b f** gezogen, so ist **a f b** das verlangte Dreieck.

§. 238.

Aufgabe.

Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, nebst dem ihr gegenüber liegenden Winkel sind gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Erste Auflösung.

Man verlängere die Basis **a b** (Fig. 247.) bis **d**, mache **e b d** = dem gegebenen Winkel α, halbire den Winkel **a b e** durch **b c** und die **a b** in **f**; errichte in **f** auf **a b** das Loth **c f**, so weit bis es in **c** von **b c** geschnitten wird. Zieht man nun **a c**, so ist **a b c** das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

§. 239.

Die vorstehende Aufgabe hat auch folgende

Andere Auflösung.

Unter die Basis **a b** (Fig. 248.) lege man an **b** (an dieselbe) den Winkel **a b c** = dem gegebenen Winkel α. Nun halbire man die **a b** in **d** und errichte sowohl in **d** auf **a b**, wie auch in **b** auf **b c** die Perpendikel **d e** und **b e**, welche sich bei gehöriger Verlängerung in **e** schneiden. Beschreibt man nun aus **e** mit **b e** einen Kreisbogen über **a b** und verlängert man **d e**, bis dieser Bogen davon in **g** getroffen wird, so ist, wenn man **a g** und **b g** zieht, **a b g** das verlangte gleichschenklige Dreieck, in welchem

a g b = α ist.

§. 240.

Aufgabe.

Aus dem Perimeter **a c** (Fig. 249.) und aus einer Kathete **a b** eines rechtwinkligen Dreiecks das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Man ziehe eine unbegrenzte gerade Linie und trage darauf den Perimeter **a c**, mache **a f** = **a b**, errichte in **f** auf **a c** das Loth **b f** = **a f**, ziehe **b c** und halbire sie in **e**. Wird nun in **e** auf **b c** die Normale **d e** konstruirt und **b d** gezogen, so ist **b d f** das verlangte rechtwinklige Dreieck, in welchem **b d + b f + d f** = **a c**
und **b f** = **a b** ist.

§. 241.

Aufgabe.

Aus der Hypothenuse und dem Perimeter eines rechtwinkligen Dreiecks das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Ist **a b** (Fig. 250.) die Hypothenuse und **a d** = dem Perimeter, von welchem die Hypothenuse weggenommen ist (ist nämlich **a d** = **p** — **a b**), so setze man auf **a b** einen Kreisbogen **a b g**, welcher einen Winkel von 45° hält. Nun nehme man die **a d**, das ist **p** — **a b** in den Zirkel, beschreibe damit aus **a** einen Bogen, welcher den Bogen **a b g** in **d** schneidet; ziehe **a d** und endlich die **b c**, so ist das Dreieck **a b c** das verlangte.

§. 242.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie **a b** (Fig. 251.) eines Dreiecks und den von deren Endpunkten **a** und **b** auf die andern Seiten gefällten Perpendikeln das Dreieck zu konstruiren.

Auflösung.

Es sind **a d** und **b c** die Perpendikel und **a b** ist die Grundlinie. Man ziehe die Grundlinie **a b** und beschreibe über derselben einen Halbkreis **a c b**. Aus **a** schlage man mit **a d** einen Bogen, welcher den Durchschnittspunkt **d** in der Peripherie des Halbkreises gibt und aus **b** beschreibe man mit **b c** einen Bogen, welcher den Punkt **c** bestimmt. Zieht man nun durch **a c** und **b d** gerade Linien und verlängert man sie, bis sie sich in **e** schneiden, so ist **a b e** das verlangte Dreieck.

§. 243.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Auflösung.

Zwei beliebige Seiten **a c** und **b c** (Fig. 252.) des gegebenen Dreiecks werden in **e** und **f** halbirt und in den

Halbirungspunkten auf den Seiten Lothe errichtet, die sich in d schneiden. Nun ziehe man b d oder a d, oder auch c d und beschreibe aus dem Centrum g des gegebenen Kreises l m n mit einer dieser Linien einen Kreis h i k, in welchen man das Dreieck h i k = a b c trägt. Werden nun die Linien g h, g i und g k gezogen und bis an die Peripherie des gegebenen Kreises verlängert und die Seiten l m, l n und m n gezogen, so ist das Dreieck l m n das verlangte; es ist nämlich: △ l m n ∽ △ a b c.

Eilfte Abtheilung *).

Verschiedene Konstructionen, die theils als Hilfe bei andern Konstructionen, theils zu sonstigem Behufe verwendet werden können.

§. 244.

Aufgabe.

Aus der Spitze eines Dreiecks ein Loth auf die Basis desselben zu fällen.

Auflösung.

Die größere der beiden Seiten, welche die Spitze c (Fig. 253.) des Winkels einschließen, von dem der Perpendikel gefällt werden soll, hier also die Seite b c, halbire man in d und beschreibe aus diesem Halbirungspunkte mit c d einen Kreisbogen, der die Verlängerung der dritten Seite a b in e treffen wird. Zieht man nun c e, so ist diese der verlangte Perpendikel.

§. 245.

Aufgabe.

An eine gerade Linie a b (Fig. 254.) einen Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel α enthält.

Auflösung.

An die a b lege man a b c = α, mache c b e = einem rechten Winkel, halbire a b in d und errichte auf a b

---

*) Mehrere hierher gehörige Aufgaben enthält die eilfte Abtheilung §. 325, §. 326, §. 327, §. 328 und §. 329.

in d ein Loth, welches bei gehöriger Verlängerung den Schenkel b f in e schneidet. Beschreibt man nun aus e mit b e den Bogen a g b, so ist jeder in ihm liegende Winkel, so wie a g b = α.

§. 246.

Ist aber der gegebene Winkel α stumpf, so verlängere man a b (Fig. 254.) etwa bis c, konstruire wie zuvor, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt der Bogen aus e mit b e nicht über, sondern unter a b beschrieben werden muß; es enthält dann der Bogen a h b den stumpfen Winkel d b c.

§. 247.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise ein Stück abzuschneiden, welches einen gegebenen Winkel α enthält.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man einen Punkt a (Fig. 255.) an, ziehe von demselben den Radius a b und mache c e rechtwinklig darauf, d. h. man lege an a eine Tangente. Wird nun c a d = dem gegebenen Winkel α gemacht, so schneidet der eine Schenkel a d die Peripherie in a und d und es ist dann, wenn α ein spitzer Winkel ist, der größere Kreisabschnitt der verlangte. Ist aber α stumpf, so enthält ihn der kleinere Abschnitt a d f. Es ist nämlich e = d a c und a f d = e a d.

§. 248.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und eine gerade Linie gegeben, man soll diese Linie als Sehne in den Kreis legen.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man einen beliebigen Punkt c an und ziehe von ihm den Durchmesser b c (Fig. 256). Auf diesen Durchmesser trage man die gegebene Linie a, man mache nämlich c d = a. Beschreibt man nun aus c mit c d einen Bogen e d f, so erhält man die Durchschnittspunkte e und f in der Peri-

pherie, aus denen man ce und cf zieht, welches die der gegebenen Linie a gleichen Sehnen sind.

§. 249.

Aufgabe.

In einem Kreise um e ist eine Sehne ab (Fig. 257.) gegeben, man soll in einem andern Kreise, dessen Durchmesser noch einmal so groß, als der des gegebenen Kreises ist, eine halbe Sehne finden, welche der gegebenen gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser bd des Kreises um e und beschreibe mit ihm aus d einen Kreis und von d durch a den Halbmesser cd. Macht man nun be = ac, so ist, wenn ce gezogen wird, diese Linie der gegebenen Sehne ab gleich.

§. 250.

Aufgabe.

Den Durchmesser und den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Auflösung.

Mit einer beliebigen Weite ab (Fig. 258.) beschreibe man aus dem willkürlich gewählten Punkt a den Bogen bc und ebenfalls mit beliebiger Zirkelöffnung aus b und c die Bogen bd und cd, welche sich in d schneiden. Verbindet man nun a mit d und beschreibt man mit ai aus a und i die Bogen eif und eaf, so ist, wenn man e und f durch ef verbindet, der Durchschnittspunkt g das Centrum und ak ist der Durchmesser.

§. 251.

Aufgabe.

Es sind zwei Punkte a und b außerhalb einer geraden Linie cd (Fig. 259.) bestimmt; man soll an dieser Linie Punkte dergestalt angeben, daß die von denselben an die Punkte a und b gezogenen Linien Winkel bilden, von denen jeder = α ist.

Auflösung.

Man ziehe ab, mache abf = α, halbire ab in e und setze bg normal auf bf in den Punkt b und eg

in d ein Loth, welches bei gehöriger Verlängerung den Schenkel b f in e schneidet. Beschreibt man nun aus e mit b e den Bogen a g b, so ist jeder in ihm liegende Winkel, so wie a g b = α.

§. 246.

Ist aber der gegebene Winkel α stumpf, so verlängere man a b (Fig. 254.) etwa bis c, konstruire wie zuvor, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt der Bogen aus e mit b e nicht über, sondern unter a b beschrieben werden muß; es enthält dann der Bogen a h b den stumpfen Winkel d b c.

§. 247.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise ein Stück abzuschneiden, welches einen gegebenen Winkel α enthält.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man einen Punkt a (Fig. 255.) an, ziehe von demselben den Radius a b und mache c e rechtwinklig darauf, d. h. man lege an a eine Tangente. Wird nun c a d = dem gegebenen Winkel α gemacht, so schneidet der eine Schenkel a d die Peripherie in a und d und es ist dann, wenn α ein spitzer Winkel ist, der größere Kreisabschnitt der verlangte. Ist aber α stumpf, so enthält ihn der kleinere Abschnitt a d f. Es ist nämlich e = d a c und a f d = c a d.

§. 248.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis und eine gerade Linie gegeben, man soll diese Linie als Sehne in den Kreis legen.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man einen beliebigen Punkt c an und ziehe von ihm den Durchmesser b c (Fig. 256). Auf diesen Durchmesser trage man die gegebene Linie a, man mache nämlich c d = a. Beschreibt man nun aus c mit c d einen Bogen e d f, so erhält man die Durchschnittspunkte e und f in der Peri-

pherie, aus denen man ce und cf zieht, welches die der gegebenen Linie a gleichen Sehnen sind.

§. 249.

Aufgabe.

In einem Kreise um e ist eine Sehne ab (Fig. 257.) gegeben, man soll in einem andern Kreise, dessen Durchmesser noch einmal so groß, als der des gegebenen Kreises ist, eine halbe Sehne finden, welche der gegebenen gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser bd des Kreises um e und beschreibe mit ihm aus d einen Kreis und von d durch a den Halbmesser cd. Macht man nun be = ac, so ist, wenn ce gezogen wird, diese Linie der gegebenen Sehne ab gleich.

§ 250.

Aufgabe.

Den Durchmesser und den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Auflösung.

Mit einer beliebigen Weite ab (Fig. 258.) beschreibe man aus dem willkürlich gewählten Punkt a den Bogen bc und ebenfalls mit beliebiger Zirkelöffnung aus b und c die Bogen bd und cd, welche sich in d schneiden. Verbindet man nun a mit d und beschreibt man mit ai aus a und i die Bogen eif und eaf, so ist, wenn man e und f durch ef verbindet, der Durchschnittspunkt g das Centrum und ak ist der Durchmesser.

§. 251.

Aufgabe.

Es sind zwei Punkte a und b außerhalb einer geraden Linie cd (Fig. 259.) bestimmt; man soll an dieser Linie Punkte dergestalt angeben, daß die von denselben an die Punkte a und b gezogenen Linien Winkel bilden, von denen jeder = α ist.

Auflösung.

Man ziehe ab, mache abf = α, halbire ab in e und setze bg normal auf bf in den Punkt b und eg

eben so auf ab in den Punkt e. Aus dem Durchschnittspunkte g der beiden Lothe eg und bg beschreibe man mit bg einen Kreis, welcher die cd in h und i schneidet. Zieht man nun von diesen Punkten die ah und bh, ferner die ai und bi, so ist aib = ahb = α.

§. 252.

Aufgabe.

Es sind drei nicht in gerader Linie liegende Punkte a, b und c (Fig. 260.) gegeben, man soll einen vierten Punkt i finden, der so liegt, daß die von ihm an die gegebenen Punkte gezogenen Linien ai, bi und ci zwei Winkel bilden, welche so groß sind, wie zwei gegebene Winkel α und β.

Auflösung.

Man verbinde a mit b und b mit c durch die geraden Linien ab und bc; lege an b der Linie ab den Winkel α, so daß abf = α wird und eben so mache man bcg = β. Die ab wird nun in d und die bc in k halbirt; in den Halbirungspunkten werden Perpendikel auf ab und bc errichtet, mit bf wird be und mit cg die ch rechtwinklig gemacht. Nun beschreibe man aus dem Durchschnittspunkt e mit be einen Kreis, eben so aus h mit hc und es ist der Durchschnittspunkt i beider Kreise der verlangte. Denn zieht man von demselben die ai, bi und ci, so ist

aib = α und bic = β.

§. 253.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel b (Fig. 261.) gegeben, man soll zwischen seinen Schenkeln einen Punkt h bestimmen, dessen Entfernung von den Schenkeln zweien gegebenen geraden Linien m und n gleich ist.

Auflösung.

Man nehme auf den Schenkeln des Winkels die Punkte a und i beliebig an, errichte in a auf ab das Loth ad = m und in i auf bc das Loth ei = n. Zieht man nun durch d die df # ab und durch e die eg # bc

und macht man diese Linien so lang, daß sie sich in h schneiden, so ist die Aufgabe gelöst: h ist der verlangte Punkt.

§. 254.

Aufgabe.

Zu gegebener Höhe ab (Fig. 262.) und Breite cd zwei gothische Gewölbebogen zu zeichnen.

Auflösung.

In den Mittelpunkt b der Breite cd stelle man ab lothrecht, verlängere die cd von beiden Seiten, ziehe ac und beschreibe damit aus a und c zwei Bogen eaf und ecf, welche sich in e und f schneiden. Verbindet man e mit f und verlängert man die ef, bis sie die gh in h schneidet, so ist h das Centrum des Bogens ac, und wenn man bg = bh macht, so ist g der Mittelpunkt des Bogens ad.

§. 255.

Aufgabe.

Es sind zwei Rechtecke ac und df (Fig. 263.) gegeben, man soll ein Parallelogramm konstruiren, welches so groß ist, wie beide Rechtecke zusammengenommen und eine bestimmte Seite gh hat.

Auflösung.

Man zeichne ein Dreieck ikl, in welchem il = gh, ik = bc und kl = ef ist. Nun trage man an ik das Rechteck ac und an kl das Rechteck df; verlängere die Seiten mn und po, bis sie sich in q schneiden und ziehe qr von q durch k. Wird endlich is und lt # qr gezogen und s mit t verbunden, so ist

ilts = ac + df.

§. 256.

Aufgabe.

Es ist ein spitzer Winkel a (Fig. 264.) gegeben, man soll auf einem seiner Schenkel ab einen Punkt e finden, der so liegt, daß, wenn man von ihm ein Loth de auf den andern Schenkel ac fällt, der Fuß d dieses Lothes von einem im Schenkel ac liegenden Punkte g so

weit entfernt ist, als das Loth de lang ist; es soll nämlich de = dg seyn.

Auflösung.

Auf ac errichte man in g das Loth fg, halbire den Winkel agf durch eg und fälle von e den Perpendikel de auf ac; der gesuchte Punkt ist d.

§. 257.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel man (Fig. 265.) und ein anderer Winkel α gegeben; ferner sind auf den Schenkeln des ersten Winkels man zwei Punkte b und c bestimmt; man soll auf dem Schenkel an einen Punkt x finden, der so liegt, daß, wenn man an ihn eine Linie xy zieht, welche mit an den Winkel α bildet, auf dem Schenkel am ein Punkt y bestimmt wird, welcher so liegt, daß, wenn man aus ihm die Linie cy aus dem gegebenen Punkte c zieht und b mit x verbindet, bx # cy werde.

Auflösung.

Man ziehe cd so, daß dcn = α werde, errichte in d auf am das Loth dg und in dem gegebenen Punkte b auf am das Loth bf, setze in a den Zirkel ein und beschreibe mit ac den Bogen crg, hierdurch wird dg begrenzt. Nun ziehe man ag, halbire diese Linie in e, fälle von e auf die am das Loth eo, beschreibe aus o mit ao einen Bogen, welcher die bf in f schneidet und mache ax = af; es ist sodann x der verlangte Punkt und bx # cy.

§. 258.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie n und ein Dreieck abc (Fig. 266.) gegeben, man soll auf einer seiner Seiten, etwa auf ac, einen Punkt e bestimmen, der so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Parallele mit be zieht, diese der n gleich sey.

Auflösung.

Man trage die Linie n auf bc, von c nach f und mache ef # ab; es ist dann e der gesuchte Punkt. Zieht man durch e die de # bc, so ist

de = n.

§. 259.

Aufgabe.

Zwei Seiten ab und ac (Fig. 267.) eines gegebenen Dreiecks abc sollen von einer geraden Linie dg dergestalt geschnitten werden, daß die Summe der durch den Schnitt gebildeten Segmente cd und bg dieser Seiten der Schneidungslinie gleich werde, daß nämlich

cd + bg = dg wird.

Auflösung.

Auf einer der beiden Seiten, welche geschnitten werden sollen, etwa auf ac, nehme man einen Punkt d nach Willkür an, verlängere die ab, bis be = cd wird, ziehe de und halbire sie in f. Wird nun in f auf de ein Loth fg errichtet, so bestimmt dieses in ab den Punkt g, der so liegt, daß, wenn man die Sekante dg zieht

bg + cd = dg ist.

§. 260.

Aufgabe.

Von einem in der Peripherie eines Kreises acb (Fig. 268.) liegenden Punkte a eine Sehne ac zu ziehen, die vom Mittelpunkt o dieses Kreises so weit entfernt ist, als die Länge einer gegebenen Linie n beträgt.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkte a ziehe man den Durchmesser ab, halbire den Halbmesser ao in e und beschreibe aus e mit ae einen Kreis. Nun nehme man n in den Zirkel, mache of = n und beschreibe damit aus o einen Kreis, welcher den zuvor beschriebenen Kreis um e in d schneiden wird. Legt man nun durch a und d die Sehne ac, so ist sie die verlangte; denn es ist

do = n.

§. 261.

Aufgabe.

Von einem außerhalb eines Kreises **bcg** (Fig. 269.) liegenden Punkte **a** eine Sekante zu diesem Kreise dergestalt zu ziehen, daß der innerhalb des Kreises fallende Theil derselben, nämlich die Sehne **bc**, einer gegebenen Linie **n** gleich werde.

Auflösung.

Man trage die gegebene Linie **n** als Sehne in den Kreis (§. 260.), man mache z. B. **fg = n** und errichte in deren Halbirungspunkt **e** ein Loth **de** auf derselben. Nun beschreibe man um **d** mit **de** einen Kreis, ziehe **ad**, beschreibe darüber einen Halbkreis, wodurch der mit **de** konstruirte Kreis in **h** geschnitten wird. Zieht man nun von **a** über **h** die **ab**, so ist **bc = n**.

§. 262.

Aufgabe.

Ein Kreis **cdgh** (Fig. 270.) und zwei außerhalb desselben liegende Punkte **a** und **b** sind gegeben; man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt **g** bestimmen, der so liegt, daß, wenn man von ihm an die gegebenen Punkte **a** und **b** die Linien **ag** und **bg** zieht, dadurch zwei Punkte **f** und **h** in der Peripherie des Kreises **cdgh** bestimmt werden, die eine solche Lage haben, daß eine durch sie gehende Linie **fh** parallel mit **ae** läuft.

Auflösung.

Man verbinde die Punkte **a** und **b** durch eine gerade Linie, beschreibe aus **a** mit **ab** einen Kreisbogen, der den gegebenen Kreis in **c** schneidet. Man ziehe ferner durch **a** und **c** die **ad** und beschreibe aus **a** mit **ad** den Bogen **dc**, welcher durch die Verlängerung der **ab** in **e** begrenzt wird. Von **e** lege man eine Tangente **ef** an den Kreis und ziehe durch den gegebenen Punkt **a**, so wie durch den Berührungspunkt **f** die **ag**, welche den gesuchten Punkt **g** in der Peripherie des gegebenen Kreises angibt. Dann zieht man von demselben die **bg**, so schneidet sie den

Kreis in h und wenn man durch f und h die fh zieht, so ist fh # ab. (§. 345.)

§. 263.

Aufgabe.

Zwischen zwei konvergirenden Linien ab und cd (Fig. 271.) liegt ein Punkt p; man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie dergestalt legen, daß sie in den Durchschnittspunkt fällt, welchen man erhält, wenn man die Linien ab und cd so weit verlängert, bis sie sich schneiden.

Auflösung.

Auf einer der Linien, etwa auf ab, nehme man einen Punkt g in einer mäßigen Entfernung von p an, lege durch p eine Linie ef, welche die gegebenen Linien ab und cd schneidet und mache gh # ef. Nun ziehe man fh, mache pq # cd und qr # ab. Verbindet man nun p mit r durch eine gerade Linie pr, so ist die Aufgabe gelöst; denn wenn man die Linien ab, cd und die so eben gefundene p so weit verlängert, bis sie sich schneiden, so kommen alle drei Linien in einem Punkte zusammen.

§. 264.

Aufgabe.

Einen Kreis in eine beliebige Anzahl (etwa in sieben) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser ab (Fig. 272.) des gegebenen Kreises und betrachte denselben als Seite eines Siebenecks (nämlich als die Seite eines Vielecks von so vielen Seiten, als das in den gegebenen Kreis zu konstruirende Polygon haben soll), suche nach §. 119, §. 120, §. 121 oder §. 122 den Mittelpunkt g eines Kreises abdc, in welchem ab eine Seite des Siebenecks ist. Nun ziehe man den Durchmesser cd # ab und lege durch c, a, ferner durch d und b gerade Linien, welche so weit verlängert werden, bis davon die Peripherie des Kreises zu ab in e und f geschnitten wird: es ist sodann, wenn man ef zieht, dies die Seite des verlangten Polygons.

§. 265.

Aufgabe.

Es ist ein Rechteck **abcd** (Fig. 273.) und eine gerade Linie **de** gegeben; man soll ein anderes dem gegebenen Rechtecke vollkommen gleiches Rechteck konstruiren, in welchem die gegebene Linie **de** eine Seite desselben ist.

Auflösung.

Man verlängere eine Seite **cd** des Rechtecks, bis **cg** = **de** wird; eben so verlängere man die andere Seite **ad**, bis eine durch **b** und **g** gelegte und verlängerte gerade Linie diese Verlängerung in **f** trifft: **af** ist dann die gesuchte Seite, aus welcher mit der gegebenen Linie **de** ein Rechteck konstruirt werden kann, welches dem gegebenen Rechteck **abcd** gleich ist. Man hat nämlich:

$$de \times af = ab \times bc.$$

§. 266.

Aufgabe.

Aus denjenigen Linien, welche von den Scheiteln der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks in die Halbirungspunkte der diesen Winkeln gegenüber liegenden Katheten gezogen werden, das Dreieck zu zeichnen.

Auflösung.

Die gegebenen Linien sind **ae** und **cd** (Fig. 274). Man mache **pe** mit **he** rechtwinklig in **e**, trage $\frac{ae}{2}$ von **e** nach **f**, mache $fg = cd$ (wenn $cd > ae$ ist), nehme **k** willkürlich auf **ep** und mache $ki = 4 \cdot ek$. Ferner ziehe man $gm \parallel kl$, mache $mn = \frac{1}{2}\, ae$ und trage **en** von **n** nach **o**. Wird nun $ep = 4\,em$ gemacht, so ist das Dreieck **eip** das verlangte und es muß $\triangle epi \cong \triangle abc$ seyn.

§. 267.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel **b** (Fig. 275.) nebst einem zwischen seinen Schenkeln liegenden Punkte **n** gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie dergestalt gezogen werden, daß sie nicht nur die

beiden Schenkel **ab** und **bc** schneidet, sondern auch mit denselben ein Dreieck bildet, welches einem gegebenen Dreiecke **def** vollkommen gleich ist.

Auflösung.

Durch den Punkt **n** ziehe man die **lm** # **bc**; fälle von **e** auf **df** das Loth **eg**, halbire es in **h** und ziehe durch **h** mit **df** eine Parallellinie **ik** und durch **f** die **fk** # **de**. Nun trage man **bl** von **k** nach **o** in die Verlängerung der **ik**, ziehe durch **o** und **f** eine gerade Linie **op** bis an die Verlängerung der **de**, mache **pr** # **df** und verlängere **df** etwa bis **s**. Ferner trage man an **f** der **fs** den Winkel **b**, d. h. man mache **sft** = **b** und verlängere **tf** bis **q**. Wird nun **lw** auf der **lm** so groß wie **fq** gemacht, von **x** in der **bc** ein Loth **xy** = **ln** gefällt und aus **y** mit **nw** ein Kreis beschrieben, so wird dadurch in **bc** der Durchschnittspunkt **z** bestimmt, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn und durch den gegebenen Punkt **n** die **z**β zieht, das Dreieck **b**β**z** = Dreieck **def** ist.

§. 268.

Aufgabe.

Aus zwei einander gegenüber stehenden Seiten **ab** = **a** (Fig. 276.) und **cd** = **b** und aus drei gegebenen Winkeln α, β und γ eines Vierecks das Viereck zu zeichnen.

Auflösung.

An **a** in der **ab**, welche so groß wie **a** gemacht wurde, trage man den Winkel α, so daß **baf** = α werde. Auf **af** nehme man einen beliebigen Punkt **c**, setze an **c** auf die **af** den Winkel **acd** = γ; mache **cd** = **b** und lege durch **d** die **dg** # **af**. Nun trage man β an **b** der **ab**, verlängere die Schenkel **bh** und **bg** so weit, bis sie sich in **e** schneiden und es ist, wenn man durch **e** die **ei** # **cd** legt, **abei** das Viereck, in welchem die Seiten **ab** und **ie** den gegebenen Seiten gleich und die Winkel **a**, **b** und **aie** ebenfalls die gegebenen sind.

§. 269.

Aufgabe.

Es sind die Seiten **a**, **b** und **c** eines Vierecks nebst den Winkeln α und β, die an der

vierten unbekannten Seite liegen, gegeben; man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

An eine beliebig große Linie **a b** (Fig. 277.) setze man die gegebenen Winkel α und β dergestalt, daß **c a b** $= \alpha$ und **a b d** $= \beta$ werde. Den Schenkel **a c** mache man so lang, wie die gegebene Seite **a** und den Schenkel **b d** mache man so groß, wie **c**. Nun ziehe man **c h** # **a b**, nehme **b** in den Zirkel und beschreibe damit aus **d** einen Bogen, welcher die **c h** in **f** schneidet und daher **d f** $=$ **b** macht. Legt man nun **f g** # **a c**, so ist **b d f g** das verlangte Viereck, in welchem

f g $=$ **a**,
b d $=$ **c**,
d f $=$ **b**,
b g f $= \alpha$ und
b $= \beta$ ist.

§. 270.

Aufgabe.

Es sind zwei Seiten **a** und **b** eines Vierecks, nebst dem von denselben eingeschlossenen Winkel γ, so wie noch zwei Winkel α und β gegeben, welche die Diagonale mit den Seiten bildet, welche den gegebenen **a** und **b** gegenüber liegen; man soll das Viereck konstruiren *).

Auflösung.

Man mache (Fig. 278.) die **a b** $=$ **a**, **b a c** $= \gamma$, **a c** $=$ **b** und ziehe **b c**; ferner mache man **c b d** $= \alpha$ und **b c d** $= \beta$. Um das Dreieck **b c d** lege man nun einen Kreis (§. 27.), ziehe **d a** bis **e** an die Peripherie, verbinde **b** und **c** mit **e** und es ist dann **a b e c** das verlangte Viereck.

§. 271.

Aufgabe.

Ein Kreis um **m** (Fig. 279.), nebst einer geraden Linie **a b**, deren Lage gegen den Kreis

---

*) Diese Aufgabe heißt die „Potenot'sche" und ist in der Feldmeßkunst von großer Wichtigkeit.

bestimmt ist, sind gegeben; man soll einen andern Kreis konstruiren, der die ab als Sehne aufnimmt und den Kreis um n berührt.

Auflösung.

In der Peripherie des Kreises um m nehme man in der Nähe der ab einen Punkt c beliebig an und lege durch a, b und c einen Kreis (§. 27.), welcher den gegebenen Kreis in c schneiden wird. Nun ziehe man durch c und d die cd und verlängere sie so weit, bis dadurch die Verlängerung der ab in e getroffen wird. Legt man nun von e an die Peripherie des gegebenen Kreises und zwar auf der Seite, wo die ab liegt, eine Tangente ef, so ist deren Berührungspunkt f auch der Berührungspunkt des verlangten Kreises, welchen man durch a, b und f zu legen hat. (§. 27.)

§. 272.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie ab (Fig. 280.) gegeben; man soll von zwei außerhalb derselben liegenden Punkten c und d an diese Linie zwei andere gerade Linien cg und dg ziehen, so daß sie die kürzesten sind, die hier gezogen werden können.

Auflösung.

Von c (oder auch von d) fälle man auf die ab ein Loth ce, verlängere es so weit, bis ef = ce wird und ziehe df, welche die ab in g schneidet. Wird nun c mit g verbunden, so ist cg + dg ein Minimum.

§. 273.

Aufgabe.

Zwischen zwei sich unter einem rechten Winkel schneidenden Linien ab und cd (Fig. 281.) ist ein Punkt e gegeben, der von ab so weit, wie von cd abliegt; man soll von diesem Punkt an die ab eine Sekante en so ziehen, daß deren Segment on einer gegebenen geraden Linie ik gleich ist.

Auflösung.

Nach der Aufgabe ist eg = eh. Man verlängere die eg, bis el = ik wird, ziehe lh, verlängere eh, bis

hm = lh ist und beschreibe über om einen Halbkreis, welcher die ab in n schneidet. Wird n mit o durch die en verbunden, so ist diese die verlangte Sekante und das Segment on derselben ist = ik.

§. 274.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis um a gegeben, dessen Radius ab ist (Fig. 282.); man soll in diesen Kreis an dessen Peripherie sechs gleich große Kreise legen, die sich und den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung.

Man ziehe den Radius ab, theile ihn in drei gleiche Theile, mache bc = $\frac{1}{3}$ ab und beschreibe aus a mit ac einen Kreis, in welchem dann die Mittelpunkte der einzuzeichnenden Kreise liegen. Konstruirt man nun in den mit ac beschriebenen Kreis ein reguläres Sechseck (§. 63.) cdfghe, so sind die Scheitel seiner Figurenwinkel die Mittelpunkte der verlangten Kreise, welche mit bc aus c, d, f, g, h und e beschrieben werden.

§. 275.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis um c (Fig. 283.) drei gleich große Kreise, die sich und den gegebenen Kreis berühren, zu beschreiben.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser ab, verlängere ihn, bis bd = ab ist, schlage über ad einen Halbkreis, errichte in c auf ab ein Loth ce bis an die Peripherie; mache cf = ce und trage cd von f nach g. Wird nun lh = eg gemacht, so ist lh der Radius der einzuschreibenden Kreise. Der Kürze wegen schlage man mit ch einen Kreis aus c und theile denselben in drei gleiche Theile bei b, h und i: es sind dann diese Theilpunkte die Mittelpunkte der verlangten Kreise.

§. 276.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis vier gleich große Kreise zu legen, welche sich und den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung.

Man ziehe **ab** (Fig. 284.), mache **bd = bc**, beschreibe über **ad** einen Halbkreis, errichte in **b** auf der **ad** das Loth **bc** bis an die Peripherie. Beschreibt man nun mit **bc** den Viertelkreis **cf** aus **b**, so ist in **ef** der Halbmesser der einzuschreibenden Kreise gefunden. Man trage daher **ef** von **b** nach **g**, schlage um **c** mit **cg** einen Kreis und theile ihn bei **ghik** in vier gleiche Theile: die Theilpunkte sind dann die Mittelpunkte der einzuschreibenden Kreise.

§. 277.

Aufgabe.

Es ist ein Quadrat **abcd** (Fig. 285.) gegeben; man soll dessen Ecken dergestalt wegschneiden, daß **hi** die Hälfte von **oh** ist.

Auflösung.

Man ziehe **ac** und **bd**, mache **ef ∥ ab** und beschreibe aus **e** mit **be** den Bogen **bf**; wodurch man **fg** erhält. Trägt man nun **fg** von **b** nach **h** und nach **i**, so ist $hi = \frac{oh}{2}$. Um die übrigen Ecken zu erhalten, trage man **fg** von **a** nach **o** und **p**, von **d** nach **n** und **m** und von **c** nach **k** und **l**.

§. 278.

Aufgabe.

Es ist ein Parallelogramm **abcd** (Fig. 286.) gegeben; man soll durch einen Punkt **e**, der in einer Seite **cd** bestimmt ist, eine gerade Linie so ziehen, daß das Dreieck **agh = abcd** werde.

Auflösung.

Man verlängere die **ab** etwa bis **i**, mache **abf = R** und **bf = de**. Beschreibt man nun aus **f** mit **ce** einen Kreis, so wird davon die **ai** in **g** geschnitten und es ist, wenn man durch **g** und **e** die **gh** zieht und sie so lang macht, daß die Verlängerung der **ad** in **h** getroffen wird, **agh** das verlangte Dreieck; es ist nämlich:

△ agh = abcd.

§. 279.

Aufgabe.

Es soll die Sehne eines Winkels von 120° gezogen werden, ohne daß man die Peripherie des Kreises in drei gleiche Theile theilen darf.

Auflösung.

Wenn **a b** (Fig. 287.) der Durchmesser des gegebenen Kreises ist, so verlängere man denselben, bis die **a c** der Hälfte von **a b** gleich ist. Auf **b c** wird in **b** ein Loth **b e** errichtet, durch **c** eine Tangente **c e** an den Halbkreis gelegt und so weit verlängert, bis sie das Loth **b e** in **e** trifft: **b e** ist dann die Sehne von 120° in einem Kreise, dessen Durchmesser **a b** ist.

§. 280.

Aufgabe.

Jeden Billardball **b** (Fig. 288.) durch einen andern **d** an einen bestimmten Ort auf dem Billard, z. B. nach **a** zu spielen.

Auflösung.

Von dem Punkte **a**, an welchen der Ball **b** gespielt werden soll, ziehe man durch den Mittelpunkt **b** eine gerade Linie **a c** bis an die Peripherie dieses Balls, d. i. bis an **c**. Spielt man nun den Ball **d** so an den Ball **b**, daß sein verlängerter Halbmesser **d e** den Punkt **c** trifft, so geht der Ball **b** nach **a**.

§. 281.

Aufgabe.

Den Punkt **c** (Fig. 289.) an der Bande eines Billards zu bestimmen, an welchen der Karambolball **a** gespielt werden muß, wenn man ihn durch den Spielball **h** nach **d** doubliren will.

Auflösung.

Von dem Karambolball **a** fälle man auf die Bande **f g** einen Perpendikel **a b**, verlängere ihn, bis **b e = a b** wird und ziehe **e d**. Der hierdurch gefundene Punkt **c** in der Bande ist derjenige Ort, an welchen man den Karambolball **a** durch den Ball **h** spielen muß, wenn er nach **d** doublirt werden soll.

§. 282.

Aufgabe.

Einen Ball a (Fig. 290) durch das sogenannte Troisiren an einen bestimmten Punkt f zu spielen.

Auflösung.

Von dem Balle a, fälle man auf die Bande ik, an welche man anspielen will und die dem Punkte f gegenüber liegt, ein Loth a b, verlängere es und mache b c = a b; verlängere i g, bis i d = b c wird, ziehe c d und mache d e = c d. Zieht man nun von e nach f eine gerade Linie e f und von dem Durchschnittspunkte g nach c die c g, so erhält man an der Bande i k den Punkt h, der so liegt, daß, wenn man den Ball a an denselben spielt, dieser unter einem dem Einfallswinkel a h b gleichen Abprallwinkel i h g an die Bande i l und zwar nach g getrieben wird, von wo er in die Richtung f g kommt und folglich nach f gehen muß.

§. 283.

Bei dem Doubliren kam der Karambolball an eine Bande, bei dem Troisiren aber kam er an zwei Banden, und im folgenden §. werden wir zeigen, wie ein Ball gespielt werden muß, der, ehe er an seinen Bestimmungsort kommt, drei Banden zu berühren hat.

§. 284.

Aufgabe.

Der Ball a (Fig. 291) soll dergestalt nach k gespielt werden, daß er drei Banden des Billards trifft, ehe er nach k kommt.

Auflösung.

Es wird a b lothrecht auf b d gemacht, dann verlängert, bis b c = a b wird; und ebenfalls mache man d e in d auf b d lothrecht und so groß wie b c. Man ziehe c e, mache e f = c e und ziehe f g # e h; verlängere h l bis g und mache i g = f g. Wird nun i mit k, l mit f und m mit n verbunden, ferner a n gezogen, so ist n der Punkt, an welchen a angespielt werden muß und es prallt hier der Ball ab, geht nach m, prallt nochmals ab, muß nach l kommen, von wo an er die Richtung nach k erhält.

§. 285.

Daß die Kraft, welche einen Billardball von a (Fig. 291.) nach n, von da nach m, von m nach l und von l bis k treiben soll, schwerlich hervorgebracht werden kann, ist wohl einleuchtend. Uebrigens ist das Ausführen der Konstructionen, welche §. 280, §. 281., §. 282 und §. 284. gibt, mit sehr vielen Hinderungs-Umständen verbunden, welche, wenn die Konstruction gelingen soll, wohl erwogen seyn müssen. Richtiger Bau des Billards, horizontale Lage desselben und, was wohl das Schwierigste für die Tischler und Tapezierer seyn mag, richtige Banden sind erforderlich. Auf alle Fälle werden jedoch die hier gegebenen geometrischen, ihrer Natur nach streng richtigen Bestimmungsmethoden, die Punkte zu bestimmen, an welche die Bälle gespielt werden müssen, wenn sie unter den hier angenommenen Bedingungen an ihren Bestimmungsort gehen sollen, als gute Wegweiser auf dem Gebiete des Billards gelten.

§. 286.

Aufgabe.

Das Griffbret einer Guitarre einzutheilen.

Auflösung.

Die Griffbretlänge **a b** (Fig 292) theile man in fünf gleiche Theile, verbinde die **a c** bei **a** mit der **a b** unter einem rechten Winkel und mache **a c = a e**, nämlich drei Fünfteln der **a b** gleich. Nun fälle man von **c** auf **a c** ein Loth **c d**, mache es so lang wie die **a c** und ziehe **b d**. Hierdurch erhält man in der **a c** einen Punkt **f**, aus welchem man mit **b f** einen Bogen **b g** beschreibt, der durch die Verlängerung der **a c** in **g** begrenzt oder vielmehr bestimmt wird. Diesen Bogen theile man nun in dreizehn gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit **c g**: man erhält dadurch auf **a b** die verlangten Theilpunkte *).

§. 287.

Aufgabe.

Es sind zwei Linien **a c** und **b c** (Fig. 293) gegeben, man soll die größere dieser Linien,

---

*) Wir überlassen es Musikern und Guitarrfabrikanten, den Grad der Anwendbarkeit dieses Verfahrens zu bestimmen.

nämlich bc in einem Punkt h so theilen, daß das Quadrat über der Summe beider Linien, weniger dem Quadrate über der kleinern, nebst dem größern gefundenen Segmente, gleich ist diesem Quadrate, weniger dem Quadrate über der kleinern Linie.

Auflösung.

Man setze beide Linien **ac** und **bc** so an einander, daß **de = ac** und **ef = bc** wird und daß sie eine gerade Linie **df** bilden; errichte dann in **f** auf **df** ein Loth **fg = ac**, ziehe **dg**, halbire sie in **i** und errichte in diesem Halbirungspunkt einen Perpendikel $ik = \frac{dg}{2}$, ziehe **dk** und beschreibe aus **d** mit **dk** den Bogen **kh**, wodurch in **df** der gesuchte Punkt **h** bestimmt ist. Es wird nämlich:

$$df^2 - dh^2 = dh^2 - de^2 \text{ *).}$$

§. 288.

Aufgabe.

Ein rechtwinkliges Dreieck **abc** (Fig. 294.) und eine gerade Linie **n** sind gegeben; man soll die Kathete **ab** dergestalt bis **e** verlängern, daß, wenn man in **e** auf **be** ein Loth errichtet und die Hypothenuse **bc** so weit verlängert, bis das Loth in **f** getroffen wird, ein Paralleltrapez **aefc** entsteht, welches dem Quadrate über der gegebenen Linie **n** gleich ist.

Auflösung.

Die Kathete **ac** wird soweit verlängert bis **ag = 2n** ist. Nun suche man zu **ac**, **n** und **ag** die vierte Proportionirte **ah** (§. 203.) und trage sie von **a** nach **h**. Ueber **bh** beschreibe man einen Halbkreis **hfdb**, verlängere **ag** bis **d** und mache **be = bd**, wodurch in **bh** der Punkt **e** bestimmt wird, der so liegt, daß, wenn man aus ihm die **ef** lothrecht auf **bh** errichtet und die Hypothenuse **bc** bis **f** verlängert, **aefc = n²** ist.

*) Der Beweis dieser Konstruction §. 664.

§. 289.

Aufgabe.

Es ist ein Rechteck efgh (Fig. 295.) gegeben, man soll in dasselbe eine parallele Fläche, deren Breite ab ebenfalls bestimmt ist, dergestalt legen, daß eine Seite derselben nach e, die andre nach g fällt.

(Andere Auflösung §. 715.)

Auflösung.

Man ziehe die Diagonale eg und fh, nehme die halbe Breite ac des Parallelstreifen in den Zirkel und beschreibe damit aus d einen Kreis. Legt man nun an diesen Kreis aus e und g Tangenten und verlängert man sie, bis die Seiten ef und gh davon in k und i geschnitten werden, so ist die Aufgabe gelöst.

Diese Konstruction ist allemal beim Zeichnen der Streben, welche an Bindwerkgebäude in die von den Ständern, Schwellen und Rähmstücken eingeschlossenen Felder kommen, anzuwenden.

§. 290.

Aufgabe.

Die Frontwände eines Gebäudes sind von ungleicher Höhe; es ist nämlich der Sims c höher als der Sims b (Fig. 296.). Man soll den Forstpunkt des Daches dergestalt bestimmen, daß das Dach bei f rechtwinklig oder so hoch, wie eine bestimme Höhe lm es verlangt, werde.

Auflösung.

Man mache ab horizontal, setze darauf in a das Loth ad = ab, ziehe bd, halbire cd in e und ziehe ef # ab. Wird nun cf gezogen, so zeigen cf und bf die Sparren, welche beim Forsten f einen rechten Winkel machen.

Ist aber der Forstpunkt l oder vielmehr dessen Höhe (lm) über dem Balken gh, bestimmt und wird verlangt, daß die Sparren kl und hl gegen gh einerlei Neigungswinkel haben sollen, so trage man die Höhe lm von g nach i, mache in = ik ziehe hn und lege il # gh. Wird um kl gezogen, so sind dies die Sparren, die mit gh einerlei Winkel bilden.

§. 291.

Aufgabe.

Man hat einen viereckigen sogenannten Klapptisch abcd (Fig. 297.) mit zwei Blättern, die, wenn sie aufgeschlagen sind, einen quadratförmigen Tisch g h m l bilden. Das eine dieser Blätter fghi, ist mit dem Kasten, dessen Breite ad sich zu seiner Länge ab wie 1 : 2 verhält, durch eine Schraube bei e verbunden, an welcher das Blatt fghi herum gedreht werden kann. Ist das Blatt film auf das Blatt fghi gelegt und sind beide Blätter in die Lage wie abcd gebracht, so ist der Tisch halb so groß, als wenn er aufgeschlagen ist. Man soll nun den Punkt e bestimmen, in welchem die Schraube an das Tischblatt fghi und an den Kasten angebracht werden muß.

Auflösung.

Man halbire ab in k, mache kp auf ab in k lothrecht, halbire kp in n, kb in o und ziehe on und ck; diese Linien schneiden sich in dem gesuchten Punkte e, in welchem die Schraube anzubringen ist.

§. 292.

Die Aufgabe des §. 291. haben die Tischler zu lösen, welche, wenn sie mit der richtigen Konstruction derselben nicht bekannt sind, sich mit einem unsichern Versuchen behelfen müssen, um den Punkt e (Fig. 297) zu finden.

§. 293.

Auch genügt die Auflösung der Aufgabe des §. 291. für jedes Verhältniß, in welchem die Breite ab (Fig. 298) zur Länge bc eines Rechtecks steht. Wäre hier nicht wie §. 291. das Verhältniß wie 1 : 2, zwischen der Breite und Länge vorhanden, so ändert dies die in dem gedachten §. gegebene Konstruction nicht ab. Man halbirt ad in k, bringt das Rechteck abcd in die Lage wie lmno und nopq, zieht kg, halbirt die kr in h, die fk in i und zieht hi. In dem Punkte e, wo sich diese Halbirungslinien schneiden, da wird die Schraube befestigt.

§. 294.

Aufgabe.

Eine gegebene begrenzte Linie ab (Fig. 299.) dergestalt in zwei Theile zutheilen, daß das Rechteck dieser Theile das größtmöglichste ist, welches durch die zwei Theile dieser Linien bestimmt werden kann.

Auflösung.

Man halbire die gegebene Linie **ab** in **c**; das aus diesen Theilen gebildete Rechteck ist ein Quadrat und zugleich das verlangte Maximum.

§. 295.

Aufgabe.

Zwischen einen rechten Winkel, dessen Schenkel von einem Viertelkreise begrenzt sind, einen Kreis dergestalt zu legen, daß sowohl die Schenkel dieses rechten Winkels, als auch der erwähnte Kreisbogen davon berührt werde.

Auflösung.

Man ziehe **bd** (Fig. 300.), verlängere **bc**, bis **bf** = **bc** wird und ziehe **ef**, wodurch die **ab** in **g** geschnitten wird. Fällt man nun von **g** auf die Linie **ab** das Loth **gh**, so wird dadurch die **be** in **h** geschnitten und es ist **h** der Mittelpunkt des einzuschreibenden Kreises, dessen Halbmesser **gh** und **eh** sind.

§. 296.

Vorstehende Aufgabe wird meistentheils, wenn sie in der Ausübung etwa beim Bauwesen, durch Versuche gelöst. Man gibt zuweilen den Fenster- und Thüröffnungen Rähmen, die mit einem Halbkreise schließen, welcher dreieckige Räume **abc** (Fig. 300) bildet, in die man Kreise legt und wobei das Bestimmen des Mittelpunkts **h** nöthig wird.

§. 297.

Aufgabe.

In ein gleichseitiges Dreieck **abc** (Fig. 301) ein Quadrat zu ziehen.

Auflösung.

Die **bc** wird in **d** halbirt und der Halbirungspunkt **d** mit **a** verbunden. Aus **d** beschreibe man mit **bd** einen

Bogen **be**, halbire ihn in **i** und ziehe **df**, bis davon die Seite **ab** getroffen wird. Eben so beschreibe man aus **d** mit **cd** einen Bogen **cke** und ziehe durch dessen Halbirungspunkt **k** die **dg**. Wird nun **fh # dg** und **gh # df** gemacht, so ist **dfhg** das verlangte Quadrat. (§. 93.).

§. 298.

Aufgabe.

Einen Halbkreis zu konstruiren, dessen Fläche dem halben Mondstücke **abd** (Fig. 302) gleich ist*).

Auflösung.

Das halbe Mondstück **abd** ist die Differenz der halben Kreisflächen **acd** und **bcd**. Um nun den verlangten Halbkreis zu finden, bringe man zwei gerade Linien **ef** und **eg** unter einem rechten Winkel an einander, mache **ef = bc**, nehme **ac** in den Zirkel und beschreibe damit aus **f** einen Bogen, wodurch der auf **ef** in **e** stehende Perpendikel in **g** geschnitten wird und es ist dann **eg** der Durchmesser des Halbkreises **egh**, welcher dem halben Mondstücke **abd** gleich ist.

§. 299.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie durch mehre Kreisbogen in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe eine beliebige lange Linie **ao** (Fig. 303.), setze auf dieselbe eine willkührliche Anzahl gleich großer Theile **ab, bc, cd, ef, fm, mn, no** u. s. w. Nun beschreibe man aus **b** mit **ab** einen Kreisbogen oder auch, wenn man will, einen Halbkreis; dann aus **c** mit **ac**, ferner aus **d** mit **ad**, aus **e** mit **ae**, aus **f** mit **af**, aus **m** mit **am** ꝛc. Bogen (oder auch Halbkreise) **ag, ah, ai, ak, al, ap aq** ꝛc. Ist nun **al** die gegebene gerade Linie, welche in z. B. fünf gleiche Theile getheilt werden soll, so nehme man sie in den Zirkel und beschreibe damit

---

*) Man sehe §. 556 der Verwandlung der Figur.

aus a einen Kreisbogen r s, welcher den fünften Bogen a l t in b treffen oder schneiden wird. Zieht man nun a l, so ist diese Linie so groß wie die gegebene und in den Punkten g, h, i, k nach Verlangen in fünf gleiche Theile getheilt.

§. 300.

Aufgabe.

Es ist eine geradlinige Figur abcd (Fig. 304) gegeben; man soll eine derselben ähnliche Figur konstruiren, deren Inhalt $\frac{n}{m}$ (etwa $\frac{4}{7}$) der gegebenen Figur ist.

Auflösung.

Man theile irgend eine Seite der Figur, etwa a b, in so viel gleiche Theile, als der Nenner des Bruchs $\frac{n}{m}$ Einheiten hat, also hier in sieben Theile und nehme von a an so viel solcher Theile, als der Zähler n Einheiten hat: hier vier; beschreibe über a b einen Halbkreis a f b, errichte im vierten Theile, das ist in e, auf a b ein Loth e f, bis an die Peripherie, ziehe a f und beschreibe damit aus a einen Bogen f g, bis an a b. Zieht man nun durch g mit b c die g h parallel, bis davon die Diagonale a c in h getroffen wird und macht man ferner k h # c d, so ist a b h k = $\frac{4}{7}$ a b c d.

§. 301.

Im Fall $\frac{n}{m}$ ein unechter Bruch oder eine ganze Zahl ist, so wird ganz natürlich die zu konstruirende Figur größer als die gegebene werden. In diesem Falle verfahre man übrigens wie zuvor: man theile die eine Seite der gegebenen Figur in so viel gleiche Theile, als der Nenner des Bruchs $\frac{n}{m}$ Einheiten hat, trage auf die Verlängerung dieser Seite so viel solcher Theile, als der Zähler m Einheiten hat und bestimme hiernach, wie §. 300. gezeigt wurde, die Figur.

Soll z. B. ein Viereck a g h i (Fig. 305.) gezeichnet werden, welches $\frac{7}{4}$ von a b e d ist, so theile man a b in vier gleiche Theile und setze deren sieben von a bis e,

beschreibe über ae einen Halbkreis, mache bf in b auf ae lothrecht, ziehe af und beschreibe damit aus a einen Bogen fg; es wird dadurch der Punkt g in ae bestimmt, durch welchen man gh # bc, bis an die Verlängerung der Diagonale ac zieht. Wird nun noch die Seite ad verlängert, bis sie von hi # cd in g geschnitten wird, dann ist:

$$achi = \frac{7}{4} abed.$$

§. 302.

Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, der $\frac{n}{m}$ (etwa $\frac{4}{5}$) eines gegebenen Kreises ist.

Auflösung.

In so viele gleiche Theile, als der Nenner m Einheiten hat, theile man den Halbmesser ac (Fig. 306.), hier etwa in fünf. Nun beschreibe man unter oder über ac einen Halbkreis, errichte im vierten Theile d (der durch die Einheitenzahl des Zählers n bestimmt ist) auf ac ein Loth bd bis an die Peripherie und ziehe bc. Beschreibt man nun aus dem Centrum c mit bc einen Bogen be, so ist e der Punkt, welcher den Halbmesser ce des zu konstruirenden Kreises bestimmt: der Kreis, mit ce beschrieben, ist $\frac{4}{5}$ des mit ac konstruirten Kreises.

§. 303.

Wenn $\frac{n}{m}$ ein unechter Bruch ist, so theile man den Radius ac (Fig. 307.) des gegebenen Kreises, wie §. 302, in so viel gleiche Theile, als der Nenner Einheiten hat und verfahre ganz so wie §. 301 bei dem Vierecke. Soll etwa der Kreis $\frac{5}{3}$ des gegebenen Kreises seyn, so theile man ac in drei gleiche Theile, ab aber mache man fünf Theilen gleich; beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in c auf ab ein Loth cd bis an d der Peripherie, ziehe ad und beschreibe damit aus a einen Kreisbogen de, welcher die ab in e schneidet. Wird nun mit ae ein Kreis beschrieben, so ist dieser $\frac{5}{3}$ des mit ac beschriebenen Kreises.

§. 304.

Aufgabe.

In ein Dreieck abc (Fig. 308.) ein Rechteck zu legen, welches das größte ist, das in das Dreieck gelegt werden kann, dessen eine Seite gh aber in die Dreiecksseite bc fällt.

Auflösung.

Man fälle von a auf bc das Loth ad und halbire es in i. Wird nun durch den Punkt i die ef # bc gezogen und werden von den hiedurch erhaltenen Punkten e und f in den Seiten ab und ac, auf die bc Lothe eh und fg gefällt, so ist efgh das größte unter allen Rechtecken, welche in das Dreieck gezeichnet werden können.

§. 305.

Aufgabe.

Das größtmöglichste Dreieck in einen Halbkreis zu zeichnen und auf dessen Durchmesser den größten Perpendikel zu errichten.

Auflösung.

Man theile den Durchmesser ab (Fig. 309.) bei c in die Hälfte und errichte in c auf ab ein Loth cd. Zieht man nun ad und bd, so ist das Dreieck abd ein Maximum und der Radius de ist der größte Perpendikel auf ab.

§. 306.

Aufgabe.

In einem Halbkreis ein Quadrat zu ziehen, so daß eine seiner Seiten in den Durchmesser des Kreises fällt.

Auflösung.

Man theile den Durchmesser ab (Fig. 310.) in fünf gleiche Theile, mache $ac = \frac{1}{5} ab$, beschreibe über bc einen Halbkreis, mache ad in a auf ab normal und ai = ad. Beschreibt man nun mit bi zwei Bogen, welche sich in k und l schneiden, so wird, wenn man k mit l durch eine grade Linie kl verbindet, die fg bestimmt, welches die Seite des verlangten Quadrats efgh ist.

§. 307.

Aufgabe.

In einen Halbkreis das größte Rechteck zu zeichnen.

Auflösung.

Man konstruire auf a b (Fig. 310.) in den Halbkreis nach §. 306 ein Quadrat e f g h: es ist das größte Rechteck, welches in den Halbkreis gelegt werden kann.

§. 308.

Aufgabe.

In ein gleichschenkliges Dreieck a b c (Fig. 311.) ein anderes gleichschenkliges Dreieck d f g zu zeichnen, welches das größtmöglichste ist und dessen Spitze in die Grundlinie b c fällt.

Auflösung.

Die Grundlinie b c wird halbirt, a d gezogen und diese Linie in e halbirt. Legt man nun durch e die f g # b c und zieht man d f und d g, so ist das Dreieck d f g das größte gleichschenklige Dreieck, welches in das Dreieck a b c gezeichnet werden kann.

§. 309.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen gleichen Seiten a und b eines gleichschenkligen Dreiecks die dritte Seite zu finden, so daß das Dreieck ein Maximum werde.

Auflösung.

Man bringe die gegebenen einander gleichen Seiten a und b so an einander, daß sie einen rechten Winkel e c d (Fig. 312.) bilden; zieht man nun d e, so ist diese Linie die gesuchte Seite und das Dreieck c d e ist ein Maximum.

§. 310.

Aufgabe.

In einen Kreis soll ein gleichschenkliges Dreieck so konstruirt werden, daß die Spitze desselben in das Centrum fällt und das Dreieck selbst ein Maximum wird und endlich soll noch die Höhe dieses Dreiecks bestimmt werden.

Auflösung.

Zuvörderst wird der Radius ac (Fig. 313.) dergestalt verlängert, daß ae = 2ac wird. Nun schlage man über ce einen Halbkreis, mache af auf ce in a lothrecht, halbire af in g, beschreibe mit ag aus a und c Bogen, die sich in d schneiden. Legt man nun durch a und d die ab bis an die Peripherie und zieht man bc, so ist abc das gesuchte Dreieck und cd oder ag dessen Höhe.

§. 311.

Aufgabe.

In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches ein Maximum ist.

Auflösung.

Man zeichne in den Kreis ein Quadrat: es ist dies das größte Rechteck, welches in den Kreis konstruirt werden kann.

§. 312.

Aufgabe.

Es soll eine begrenzte gerade Linie dergestalt in drei Theile gelegt werden, daß, wenn man aus diesen Theilen ein Dreieck bildet, solches den größten Flächeninhalt, unter allen Dreiecken hat, deren Perimeter der gegebenen Linie gleich sind.

Auflösung.

Man theile die gegebene Linie in drei gleiche Theile und bilde ein gleichseitiges Dreieck: es ist dies unter den vorhandenen Umständen ein Maximum.

§. 313.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie ab (Fig. 309.) gegeben, man soll in ihr den Punkt c bestimmen, in welchen eine gegebene Dreieckshöhe cd, lothrecht so gestellt wird, daß, wenn man die Linien ad und bd zieht, der Perimeter ad + bd + ab des Dreiecks abd ein Maximum werde.

Auflösung.

Man halbire die gegebene Linie ab, der Halbirungspunkt c ist der der gesuchte, in welchen man die Höhe

cd auf ab normal setzt, wodurch ein Dreieck abd erhalten wird, dessen Perimeter ein Minimum ist.

§. 314.

Aufgabe.

Zwei gerade Linien ab und cd (Fig. 314.) sind bei c unter einem rechten Winkel mit einander verbunden. Auf bc ist in einer bestimmten Entfernung ce von dem Punkt c eine Linie ef gegeben, von deren Endpunkten f und e gerade Linien an irgend einen Punkt g, h oder i gezogen werden, daß der dadurch gebildete Winkel egf oder ehf ein Maximum werde.

Auflösung.

Die Entfernung c bis e trage man von c nach g und es ist g der gesuchte Winkel: er ist allemal größer, als jeder andere Winkel ehf oder eif ꝛc. Man darf also nur den Winkel $ceg = 45^{\circ}$ machen, um diese Aufgabe zu lösen.

§. 315.

Aufgabe.

Aus einer begrenzten geraden Linie ein Viereck zu bilden, welches ein Maximum ist.

Auflösung.

Man bringe die Seiten, nämlich die gegebenen Linien dergestalt an einander, daß ein Viereck gebildet wird, um welches ein Kreis beschrieben werden kann.

§. 316.

Aufgabe.

Eine krumme Linie aus verschiedenen Kreisbogen zu bilden, so daß sie ohne Bruch, ohne einen Absatz, in gutem Schwunge fortgehe.

Auflösung.

Man muß darauf sehen, daß alle Kreisbogen, welche die krumme Linie bilden, aus solchen Mittelpunkten c, d, g, i ꝛc. (Fig. 315.) beschrieben sind, welche in der Verlängerung der Halbmesser liegen, mit deren die bereits beschriebenen Bogen konstruirt sind.

Hat man z. B. aus a einen Bogen geschlagen, des-

sen Endpunkt in b seyn soll, so verbinde man a mit b, verlängere dessen Halbmesser und setze in denselben, entweder in beliebiger oder bestimmter Entfernung von b, den Mittelpunkt c für den zweiten Bogen be, welcher mit bc aus c beschrieben wird. Eben so ziehe man den Halbmesser ce, verlängere ihn und nehme darauf das Centrum d an, woraus mit de der Bogen ef beschrieben wird. Ferner ziehe man df, verlängere sie, nehme in dieser Verlängerung den Punkt g an und beschreibe daraus mit fg den Bogen fh. Fährt man nun auf ähnliche Art fort, so wird die dadurch erhaltene krumme Linie aefh in vollkommenem Schwung ohne Bruch fortgehen.

§. 317.

Aufgabe.

Es ist ein Quadrat und eine gerade Linie gegeben, man soll ein dem Quadrate gleiches Rechteck konstruiren, welches eine Seite hat, die der gegebenen Linie gleich ist.

Auflösung.

Wenn abcd (Fig. 273.) das gegebene Quadrat, de oben die gegebene Linie ist, so verlängere man die Seite cd des Quadrats, bis cg = de wird. Ebenfalls verlängere man die ad, bis sie von der durch g und b gelegten geraden Linie fg in f geschnitten wird: af ist dann die gesuchte Seite und

af × de = dem gegebenen Quadrate abcd.

§. 318.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß, als das über der gegebenen Linie ab (Fig. 316.) konstruirte Quadrat ab^2 ist.

Auflösung.

Die cd mache man so groß wie ab, halbire sie in h durch das auf ab errichtete Loth eh, welches man = dh macht. Wird nun de gezogen, so ist diese Linie die Seite des gesuchten Quadrats; es ist nämlich $defg = \frac{ab^2}{2}$.

§. 319.

Die vorstehende Aufgabe kann auch auf folgende Art gelöst werden: man ziehe in das gegebene Quadrat abcd

(Fig. 317.) die Diagonalen ac und bc, mache df # ce und cf # de, es ist sodann:

$$cdef = \frac{1}{2}abcd.$$

§. 320.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches noch einmal so groß als ein gegebenes ist.

Auflösung.

Wenn abcd (Fig. 318.) das gegebene Quadrat ist, so verlängere man die Seite ad, bis de = ab ist, ziehe be und beschreibe über be ein Quadrat ebgf: es ist dies das gesuchte, indem ebgf = 2abcd ist.

§. 321.

Aufgabe.

Es sind zwei Quadrate gegeben, man soll ein drittes Quadrat konstruiren, welches dem Unterschiede der gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung.

An die Schenkel eines rechten Winkels eab (Fig. 318.), trage man die Seite ab des kleineren Quadrats, nehme die Seite be des größeren Quadrats in den Zirkel und beschreibe damit aus b den Bogen lem, welche die ae in e schneidet. Wird nun über ae ein Quadrat ahie errichtet, so ist es der Unterschied der Quadrate befg und abcd; es ist nämlich:

$$aeih = befg - abcd.$$

§. 322.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu konstruiren, welches mehreren Quadraten zusammengenommen gleich ist.

Auflösung.

Man zeichne einen rechten Winkel def (Fig. 319.), dessen Schenkel de und ef so groß sind als die Seiten zweier Quadrate a und b und ziehe df. Auf df errichte man in d ein Loth dg, welches so groß ist, als die Seite des dritten Quadrats c und ziehe fg. Wären nun noch mehrere Quadrate gegeben, so müßte man auf die beschrie-

bene Weise fortfahren, nämlich auf df müßte in d ein Loth gesetzt und solches der Seite des vierten Quadrats gleich gemacht, die Hypothenuse gezogen und diese zur Quadratseite genommen werden ꝛc.

Da indeß hier nur die drei Quadrate a, b und c gegeben sind, so konstruire man über fg das Quadrat fghi, es ist so groß wie a + b + c.

§. 323.

Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, der noch einmal so groß ist, als ein gegebener Kreis.

Auflösung.

Man setze an das Ende b (Fig. 320.) des Durchmessers bc des gegebenen Kreises ein Loth ab = bc und ziehe die Hypothenuse ac: so ist der Durchmesser eines Kreises, welcher noch einmal so groß als der Kreis um d ist.

§. 324.

Zeichnet man einen rechten Winkel abc (Fig. 320.) und macht man den einen seiner Schenkel bc dem kleineren Durchmesser zweier ungleich großen Kreise gleich; macht man ferner den Schenkel ac dem Durchmesser des größern Kreises gleich, so ist ab der Durchmesser des Unterschiedes beider Kreise. Soll man aber einen Kreis beschreiben, der mehreren gegebenen Kreisen zusammengenommen gleich ist, so verfahre man mit deren Durchmessern eben so, wie man §. 322. mit den Seiten mehrerer Quadrate verfuhr. Die zuletzt gefundene Hypothenuse ist der Durchmesser desjenigen Kreises, dessen Fläche so groß ist, wie die Flächen der gegebenen Kreise zusammengenommen.

§. 325.

Aufgabe.

Es ist ein Quadrat über b (Fig. 321.) und eine gerade Linie a gegeben, man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruiren, dessen Hypothenuse der gegebenen Linie und dessen Flächeninhalt dem Inhalte des gegebenen Quadrats gleich ist.

Auflösung.

Man mache **cd** der gegebenen Linie **a** gleich, errichte auf derselben in **c** ein Loth **ce** und mache es zweimal so groß, als die Seite **b** des gegebenen Quadrats und ziehe **de**. Macht man nun **cg = b** und **fg # de**; schlägt man ferner über **cd** einen Halbkreis und zieht man **fh # cd**, so ist, wenn **ch** und **dh** gezogen werden, Dreieck **cdh** dem gegebenen Quadrate über **b** gleich und es hat auch in **cd** die Hypothenuse **a**: es ist nämlich Δ **cdh = b²**.

§. 326.

Aufgabe.

Die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, dessen Perimeter einer gegebenen Linie und dessen Inhalt einem gegebenen Quadrat gleich ist.

Auflösung.

Es ist **a** der gegebene Perimeter und **b** (Fig. 322.) die Seite des gegebenen Quadrats. Man mache **ab = a**, errichte in **b** auf der **ab** ein Loth **bc = 2b**, mache **bd = b**, ziehe **ac** und mit ihr die **de** durch **d** parallel. Halbirt man nun **ab** in **f** und macht man **bg = bf**, so ist **eg** die gesuchte Hypothenuse. Will man nun das Dreieck selbst konstruiren, so darf man nur mit **eg** und **b** nach §. 325 operiren, indem man dort **a = eg** nimmt.

§. 327.

Aufgabe.

Die Seiten eines Dreiecks, dessen Inhalt einem gegebenen Quadrat gleich ist, stehen in geometrischer Progression; man soll die Seiten dieses Dreiecks bestimmen.

Auflösung.

Auf eine gerade Linie **ap** (Fig. 323.) setze man in **a** einen Perpendikel **ab**, welcher die Seite **s** des gegebenen Quadrats gleich ist; mache **ac = 2ab**, ziehe **bc** und mache **bd = ab**. Ferner mache man **ce = cd** und **ek = ac**, beschreibe unter **ac** und über **ak** Halbkreise, welche einen in **c** auf **ap** errichteten Perpendikel in **f** und **l** schneiden. Nun halbire man **ca** in **h**, mache **cg = cf** und **cm = cl** und beschreibe ferner unter

hg und über hm Halbkreise, welche die lf in i und n schneiden. Wird endlich co = cn gemacht und oi gezogen, so ist das Dreieck oci das verlangte; es ist nämlich △ oci = s^2.

Auch bilden die Seiten ci, co und oi die Glieder einer geometrischen Reihe, deren Quotient $\frac{co}{ci}$ ist.

§. 328.

Aufgabe.

Aus der Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und aus dem Perpendikel, welcher vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällt ist, die Seiten, sowie das Dreieck selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summen der Katheten sei die Linie m (Fig. 324.) und n sei die Höhe des Dreiecks. Man ziehe ein Rechteck cdfg (Fig. 324.), in welchem fg = m und cg = n ist. Nun ziehe man cf, mache ef = df und bc = ce. Ueber bc beschreibe man einen Halbkreis, welcher die fg in zwei Punkten a und e schneidet. Zieht man nun von dem einen Durchschnittspunkt a die ac und die ab, so ist abc das gesuchte Dreieck.

§. 329.

Aufgabe.

Es ist ein Quadrat nebst einem spitzen Winkel gegeben, man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruiren, welches den gegebenen Winkel enthält und mit dem Quadrat gleichen Flächeninhalt hat.

Auflösung.

Die Seite des Quadrats sei n (Fig. 325.) und der gegebene Winkel = α.

Man mache ad = 2n und ade = α; errichte auf ad in a ein Loth ae, verlängere es unterhalb der ad und mache edg = einem rechten Winkel. Ferner mache man ah = ag, halbire ad in i, beschreibe über hi einen Halbkeis, wodurch in ae der Punkt l bestimmt wird. Trägt man nun al von a nach b und zieht man

b c # d e, so ist das Dreieck a b c das verlangte: es hat einen Winkel a b c = α und sein Inhalt ist dem des gegebenen Quadrats über n gleich.

§. 330.

Aufgabe.

Einen Kreis zu finden, dessen Inhalt dem Inhalte der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich ist, dessen Diagonale d und Höhe h man kennt.

Auflösung.

Man mache a b = d (Fig. 326.) und b c = h; beschreibe über a c einen Halbkreis und mache b d lothrecht auf a c in d; es ist sodann b d der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt dem Mantel eines durch d und h bestimmten Cylinders gleich ist.

§. 331.

Aufgabe.

Aus dem Durchmesser d einer Kugel und der Höhe h eines ihr gleichen Cylinders den Durchmesser dieses Cylinders zu finden.

Auflösung.

Die Höhe h des Cylinders trage man von a nach b (Fig. 327.), mache das Loth b c in b auf a b zwei Dritttheilen des Durchmessers d der Kugel gleich, trage den Durchmesser d von a nach d, ziehe a c, errichte in d auf a b ein Loth und mache d f = d e; auch beschreibe man über a f einen Halbkreis. Verlängert man nun die d e bis g, so ist d g der verlangte Durchmesser des Cylinders.

§. 332.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser a c und die Höhe b d (Fig. 328.) eines geraden Kegels gegeben; man soll den Durchmesser eines Cylinders finden, welcher mit dem Kegel gleichen Kubikinhalt und einerlei Höhe hat.

Auflösung.

Man verlängere die Höhe b d des Kegels a b c bis f, beschreibe auf dessen Durchmesser a c das gleichseitige

Dreieck ace, halbire eine Seite desselben, etwa ae in h und ziehe ch; wodurch die de in g geschnitten wird. Es ist sodann cg der gesuchte Durchmesser des Cylinders.

§. 333.

Aufgabe.

Die Höhe eines Cylinders verhält sich zum Durchmesser desselben, wie sich zwei Linien m und n zu einander verhalten. Man soll hieraus und aus dem Durchmesser eines Kreises, dessen Fläche dem Mantel des Cylinders gleich ist, die Höhe und den Durchmesser des Cylinders bestimmen.

Auflösung.

Man mache ab = n (Fig. 327.) und das in b auf ab errichtete Loth bc = m. Ferner mache man ad der halben Höhe gleich, ziehe ac, errichte in d auf ab einen Perpendikel de und mache df = de. Wird nun über af ein Halbkreis beschrieben und die de bis an seine Peripherie verlängert, so ist dg die verlangte Höhe des Cylinders. Den Durchmesser aber findet man, wenn man einen beliebig großen Winkel hik zeichnet, darauf il = m, lh = n, im = der Höhe dg macht, die lm zieht und hk # lm macht: es ist dann mk der verlangte Durchmesser.

§. 334.

Aufgabe.

Kubische und biquadratische Gleichungen durch Kreis und Parabel zu lösen, d. h. die unbekannten Größen dieser Gleichungen durch Konstruction zu finden.

Auflösung.

Wenn

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y - Dp^3 = o$$

die allgemeine biquadratische Gleichung ist, welche konstruirt werden soll und setzt man in derselben

$$A = 4a,$$
$$B = 4a^2 + 2bp + p^2,$$
$$C = 4ab - 2cp \text{ und}$$
$$Dp = r^2 - b^2 - c^2, \text{ so wird}$$

1) $a = \frac{A}{4}$,

2) $b = \frac{2a^2}{p} + \frac{p}{2} - \frac{B}{2}$,

3) $c = \frac{2ab}{p} - \frac{C}{2}$ und

4) $r^2 = b^2 + c^2 + Dp$.

Nach dieser Vorbereitung, von welcher der Grund in allen guten Lehrbüchern der Arithmetik zu finden ist, nehme man irgend eine Größe zum Maasstab, z. B. einen Zoll, zwei Zoll, vier Zoll u. dergl., gebe der Länge ah (Fig. 329.) die Hälfte davon und zeichne (nach §. 160. dritte Auflösung) eine Parabel, deren Parameter viermal so groß als ah ist *). Nun ziehe man die Achse ag und trage die vom Maasstabe genommene Länge für a (aus 1) auf ag lothrecht von e bis d und ziehe durch den Durchschnittspunkt d eine Parallele df mit ag, mache bd = b (aus 2) und errichte in b auf df ein Loth bc = c (aus 3). Dieser Punkt c ist der Mittelpunkt, aus welchem mit einer Zirkelöffnung die durch r (aus 4) bestimmt ist, im Kreis beschrieben wird, den die Parabel in vier Punkten m, n, o und p, auch wohl nur in dreien oder auch nur in zweien schneiden wird, je nachdem die Gleichung, welche man konstruirt, vom vierten, dritten oder zweiten Grade ist; die Lothe mq und nv sind dann die positiven und zp so wie ow sind dann die negativen Wurzeln.

Ein Beispiel wird das hier gelehrte Verfahren mehr deutlich machen. Man soll die Gleichung

$$y^4 - 4y^3 - 7y^2 + 22y + 24 = o$$

konstruiren.

Es ist also $\frac{p}{2}$ nämlich 2ah die Einheit, welche wir auf einem Transversalmaasstabe (§. 224.) in 10 gleiche Theile theilen wollen.

Nun ist nach der Anfangs aufgestellten allgemeinen Gleichung

5) $A = 4$,

*) Es ist hier nämlich ac dieselbe Linie, welche bei Fig. 173. durch ac oder cd bezeichnet wurde.

6) $Bp = 7$,
7) $Cp^2 = 22$ und
8) $Dp^3 = 24$;
folglich wird (wegen 1)
9) $a = \frac{4}{4} = 1$ werden, und wegen 2 ist
10) $b = \frac{2 \cdot 1^2}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 3{,}75$, weil

$B = \frac{7}{p}$ (nach 6) ist.

Aus 3 wird ferner

11) $c = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3{,}75}{2} - (\frac{11}{2} : 2) = 1$, weil

$C = \frac{22}{p^2}$ (in 7) ist; und endlich ist nach 4

12) $r = \sqrt{3{,}75^2 + 1^2 - \frac{24}{4}} = 3{,}0\ldots\ldots$

Der Bruch $\frac{24}{4}$ unter dem Wurzelzeichen, wurde erhalten aus $Dp^3 = 24$ (aus 8); weil aber in 4 nur Dp vorkommt, so mußte der Zähler 24 noch durch $p^2 = 2^2 = 4$ getheilt werden. Jetzt nehme man (wegen 1) die Einheit des Maasstabs in den Zirkel und trage diese Länge von der Achse a g lothrecht von e nach d (welches am leichtesten dadurch vollzogen wird, daß man vom h ein Loth hk unter hg fällt, es der Einheit gleich macht und durch k die fk ∥ hg legt; wodurch die Parabel in d geschnitten und de bestimmt wird), mache db = 3,75 = b (aus 10) und errichte endlich in b auf der df das Loth bc = 1 = c (aus 11).

Beschreibt man nun aus c mit 3,0... = r (wegen 12) einen Kreis, so wird er die Parabel in m, n, p und o schneiden und es ist z. B. das Loth mq auf df die unbekannte y eine der gesuchten Wurzeln, welche man, wenn man diese Länge auf dem Maasstabe de oder hk mißt, = 4 findet. Eben so ist auch nv eine und zwar die zweite positive Wurzel; wogegen zp und wo die beiden negativen Wurzeln sind, die, wenn man sie durch Zahlen ausgedrückt haben will, nur auf dem angefertigten Maasstabe (dessen Einheit hk oder de ist) gemessen werden dürfen.

Hat man eine vollständige kubische Gleichung zu konstruiren, so multiplicire man sie mit ihrer Wurzel, wo-

durch eine biquadratische Gleichung erhalten wird, die nach den gegebenen Regeln konstruirt werden kann.

Soll z. B.

$$y^3 - Ay^2 + Bby + Cp^2 = o$$

durch Konstruction aufgelöst werden, so multiplicire man diese Gleichung mit ihrer Wurzel y und man erhält:

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y + o;$$

eine Gleichung, in welcher das letzte Glied $\pm Dp^3$ fehlt. Man darf daher nur in dem Werthe für r^2 (in 4)

$$D = o$$

setzen und übrigens ganz nach der ertheilten Anweisung operiren. Es geht dann der Kreis durch a und er schneidet dann die Parabel nur dreimal.

Fehlt etwa in der gegebenen Gleichung das zweite Glied, so wird $a = o$ (in 1),

$$b = \frac{p}{2} - \frac{B}{2} \text{ (in 2) und}$$

$$c = \frac{b}{2} \text{ (in 3) werden.}$$

Ist die Gleichung rein, oder ist auch $B = o$, so wird

$$b = \frac{p}{2} \text{ und}$$

$$c = \pm\frac{C}{2}.$$

Ganz auf dieselbe Art verfährt man, wenn reine biquadratische oder quadratische Gleichungen konstruirt werden sollen.

§. 335.

Aufgabe.

Einen geradlinigen Winkel mno (Fig. 330.) durch die Parabel und den Kreis in drei gleiche Theile zu theilen *).

Auflösung.

Mit einem beliebig großen Radius mn beschreibe man aus n einen Bogen mo, fälle von m auf no das Loth mp und zeichne eine Parabel, bei welcher $ab = \frac{mn}{8}$ d. h. bei welcher der Parameter $p = \frac{mn}{2}$ ist. Den Ra-

*) §. 18.

dius **m n** mache man zur Einheit; man mache ihn zum Maasstabe, theile ihn etwa in 10, 100, 1000 ꝛc. Theile und trage ihn von **a** nach **d** und errichte in **d** auf **a c** das Loth **d e** = $\frac{1}{2}$ **n p**. Nun addire man die Zahlen, welche das Maas der **a d** und **d e** bezeichnen, ziehe aus der Summe die Wurzel, messe vom Maasstabe so viel Theile, als diese Wurzel Einheiten hat, ab und beschreibe damit aus **e** einen Kreis, welcher durch den Scheitelpunkt **a** der Parabel gehen und sie in den drei Punkten **f**, **g** und **h** schneiden wird. Von dem obern Punkte **h** fälle man auf die **b c** das Loth **c i** und trage es von **n** nach **k** auf die **n o**. Errichtet man endlich in **k** auf **n o** das Loth **l k**, so ist Bogen **o l** = $\frac{1}{3}$ Bogen **o m** und **l n o** = $\frac{1}{3}$ **m n o**.

§. 336.

Aufgabe.

Zwischen zwei begrenzten geraden Linien **a** und **b** (Fig. 331.) zwei mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung.

Nach §. 160 (dritte Auflösung) zeichne man eine Parabel, bei welcher **a b** = $\frac{1}{4}$ **a** *) ist, errichte im Scheitel **b** die **b d** = $\frac{1}{2}$ **b** und mache **d e** = $\frac{1}{2}$ **a** mit **a c** parallel. Zieht man nun **b e** und beschreibt man damit aus **e** einen Kreis, so schneidet er die Parabel in **f** und es ist, wenn von **f** auf die **b c** das Loth **f g** gefällt wird, **f g** die eine und **b g** die andere der beiden gesuchten mittlern Proportionirten zwischen **a** und **b**; es ist nämlich

a : f g = b g : b.

§. 337.

Aufgabe.

Von einem rechtwinkligen Dreieck **A B C** (Fig. 332.) ist das Segment **B D** = **a** gegeben, welches durch das vom Gipfel **C** auf die Hypothenuse **A B** gefällte Loth **C D** gebildet wird. Man weiß, daß bei diesem Dreieck $\mathbf{AD^2}$ + $\mathbf{CD^2}$ + einem Rechteck unter **C D** und einer gegebenen Linie **b** gleich ist einem Rechteck aus **a**

*) D. h. es ist der Parameter **p** = **a**.

in das andere Segment AD + einer ebenfalls gegebenen Linie c; es sollen doch seyn:

$$AD^2 + CD^2 + CD \cdot b = a\,(AD + c);$$

man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Auf eine gerade Linie setze man $ri = \frac{b}{2}$, errichte in i auf ri das Loth $hi = \frac{a}{2}$; ziehe die Hypothenuse rh und verlängere sie so, daß $rl = a$ und $ro = c$ werde. Ueber ol beschreibe man einen Halbkreis, errichte in r auf ol das Loth cr, ziehe ch und schlage damit aus c einen Kreis, in welchen man dessen Durchmesser ab # ol legt. Von c bis k trage man $\frac{a}{2}$, errichte in k auf ab das Loth $dk = \frac{b}{2}$ und ziehe durch d die ds # ab. Nun mache man a zum Parameter und konstruire (nach §. 160 dritte Auflösung) an d eine Parabel, deren Achse ds ist. Diese wird nun den Kreis um c in m schneiden und es ist, wenn man von m auf ds den Perpendikel mq fällt, $dq = A$ und $qm = CD$; woraus, wenn man $qs = a$ macht und ms zieht, ein rechtwinkliges Dreieck mqs entsteht, welches die verlangten Eigenschaften hat.

§. 338.

Aufgabe.

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck abc (Figur 333a) gegeben; man soll das Quadrat bcde über dessen Hypothenuse so zerlegen, daß man aus dessen Theilen die Quadrate über den Katheten bilden, folglich den pythagoräischen Satz dadurch mechanisch beweisen kann.

Auflösung.

Durch d ziehe man df # ac, errichte in c auf ac ein Loth ci, fälle von e auf df einen Perpendikel eg, verlängere ab bis h, wo die Verlängerung von df getroffen wird und trage bh von d nach k, auch errichte man in k auf df das Loth kl.

Will man nun das Quadrat über der größern Kathete ac bilden, so bringe man die Stücke 1, 2 und 3

so zusammen, wie die Figur unter a c zeigt, und zum kleinern Quadrate nehme man die Stücke 4 und 5 *).

§. 339.

Aufgabe.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck abc (Figur 334.) verhalten sich die Katheten ab und ac zu einander wie 3 : 4, und die größere Kathete ac verhält sich zur Hypothenuse bc wie 4 : 4; man soll den pythagoräischen Satz hieran mechanisch beweisen.

Auflösung.

Die Hypothenuse bc theile man in fünf, die größere Kathete ac in vier und die kleinere Kathete ab in drei gleiche Theile; beschreibe über jeder dieser Seiten ein Quadrat; nämlich über ab das Quadrat abih, über ac das Quadrat acfg und über bc das Quadrat bcde. Jede der Seiten cd, de und be des Quadrats über der Hypothenuse theile man in fünf gleiche Theile; jede der Seiten ag, fg und cf theile man in vier und jede der Seiten ah, hi und bi theile man in drei gleiche Theile, ziehe die Theilpunkte durch gerade Linien so zusammen, daß das Quadrat bcde in fünfundzwanzig, das Quadrat acfg in sechszehn und das Quadrat abih in neun gleich große Quadrate zerlegt wird; wodurch dann der Beweis geführt ist, weil

bcde = acfg + abih, nämlich weil
25 = 16 + 9 ist.

§. 340.

Aufgabe.

Zwei gleich große Quadrate abcd und efgh (Fig. 335.) so in Theile zu zerlegen, daß man mit diesen Theilen den pythagoräischen Satz an einem gleichschenkligen Dreiecke beweisen kann.

---

*) Aus den Stücken, in welche das Quadrat bcde zerlegt wurde, kann auch ein Rechteck abcd (Fig. 333b) gebildet werden, wenn man die gedachten Stücke so zusammenstellt, wie die Figur zeigt.

Auflösung.

Man ziehe in das Quadrat **abcd** die Diagonale **bd**. Ferner halbire man die Seite **he** des Quadrats **efgh** in **l** und die Seite **ef** in **i**, mache **lk** # **ef** und **ik** # **eh**. Nun ziehe man **hk** und **kg** und **im** # **kg** und zeichne ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck **nop**, bei welchem **np** = **op** = **ab** = **ef** ist. An diesem Dreiecke kann man das Quadrat **norq** aus den beiden Quadraten **abcd** und **efgh** genau zusammensetzen, wie die Figur deutlich zeigt.

§. 341.

Aufgabe.

Das Quadrat **achi** (Fig. 336.) der Hypothenuse **ac** eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks **abc** so zu zerlegen, daß man aus den dadurch erhaltenen Stücken die Quadrate **abde** und **bcgf** der Katheten **ab** und **bc** bilden kann.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen **ah** und **ci** des Quadrats der Hypothenuse; die vier Dreiecke, in welche hierdurch dieses Quadrat zerlegt ist, können, wie die Figur zeigt, so zusammengelegt werden, daß daraus zwei gleich große Quadrate **abde** und **bcgf** entstehen. Zeichnet man nun ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck so groß wie **abc** und zerlegt man das Quadrat der Hypothenuse, wie hier gezeigt wurde, so kann man an die Katheten die beiden Quadrate **abde** und **bcgf** legen, wodurch der Beweis geführt ist.

§. 342.

Aufgabe.

Aus dem Durchmesser **ab** (Fig. 337.) eines Kreises die Seite des in diesen Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreiecks zu finden.

Auflösung.

Aus **a** und **b** beschreibe man mit **ab** zwei sich schneidende Kreisbogen **ac** und **bc**, halbire den gegebenen Durchmesser **ab** in **d** und ziehe die **cd**: sie ist die Seite des in den Kreis über **ab** zu beschreibenden gleichseitigen Dreiecks; sie ist die Sehne von 60°.

Es ist demnach die Höhe des über dem Durchmesser konstruirten gleichseitigen Dreiecks die Seite des in den Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreiecks.

§. 343.

Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren, welches einem gegebenen Dreieck **abc** (Fig. 338.) gleich ist.

Erste Auflösung.

Eine beliebige Dreiecksseite, etwa **bc**, des gegebenen Dreiecks halbire man in **d**, errichte in diesem Punkt auf **bc** ein Loth **de** bis an die durch **a** mit **bc** parallel gehende Linie **ae**. Ueber **bc** beschreibe man das gleichseitige Dreieck **bcf** und über **be** schlage man einen Halbkreis. Durch **f** ziehe man **gh # bc**; es wird dadurch die **be** in **i** geschnitten. In **i** errichte man auf **be** das Loth **ik** und ziehe **bk**, welches die Seite des verlangten gleichseitigen Dreiecks ist.

Andere Auflösung.

Auf die größere Seite **ac** (Fig. 339.) des gegebenen Dreiecks setze man in deren Halbirungspunkt **d** ein Loth **dl**, lege durch **k** die **bk # ac**, ziehe **ab** und **bc**, beschreibe über **ac** ein gleichseitiges Dreieck **ace**, schlage über **de** einen Halbkreis, mache **bf** lothrecht auf **de**, ziehe **df** und beschreibe damit aus **d** einen Bogen **fg**. Zieht man nun durch **g** die **gh # ae** und die **gi # ce**, so ist das Dreieck **ghi** gleichseitig und dem gegebenen Dreieck **ack** gleich. (§. 519.)

§. 344.

Aufgabe.

Ein Kreis **klcm** (Fig. 340.) nebst einer außer demselben liegenden geraden Linie **ab** ist gegeben; man soll an der Peripherie einen Punkt **l** finden, so daß, wenn man durch ihn von den Endpunkten **a** und **b** der gegebenen geraden Linie **ab** bis an die Peripherie Sekanten zieht, die hierdurch bestimmten Punkte **k** und **m** so liegen, daß eine durch sie gehende **km # ab** geht.

Auflösung.

Man lege von b die Tangente bc an den Kreis, trage ab von d nach e auf den Schenkel eines willkürlich genommenen Winkels d, mache dg = bc, und auch ef = bc, ziehe ge und mit ihr durch f die fh parallel. Trägt man nun gh von b nach i und legt man von i eine Tangente ik an den Kreis, so ist, wenn man k mit b durch die bk verbindet, l der gesuchte Punkt in der Peripherie. Denn wenn man durch a und l die Sekante am bis an die Peripherie zieht, so hat er eine solche Lage, daß, wenn km gezogen wird, diese Linie mit ab parallel geht.

§. 345.

Aufgabe.

Ein Kreis und eine außerhalb desselben liegende gerade Linie ab (Fig. 341.) ist gegeben; man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt finden, so daß, wenn man von ihm an die Endpunkte a und b der ab gerade Linien al und bl zieht, diese den Kreis dergestalt in k und m schneiden, daß die diese beiden Punkte verbindende Linie km mit ab parallel läuft *).

Auflösung.

Von a lege man die Tangente ac an den Kreis, bilde einen beliebig großen (aber spitzen) Winkel d, mache de = ab, ef und dh = ac, ziehe he und mache fg # he. Nun trage man die gh von a nach i, lege von i die Tangente ik an den Kreis und ziehe durch a und k die Sekante al, welche den verlangten Punkt l bestimmt. Zieht man nämlich von l die bl, so schneidet sie die Peripherie in m und dieser Punkt liegt so, daß, wenn man ihn mit k durch die Linie km verbindet, diese Linie parallel mit ab ist, wie die Aufgabe verlangte.

§. 346.

Aufgabe.

Ein Kreis und zwei innerhalb desselben liegende Punkte a und b (Fig. 342.) sind gege-

*) §. 262.

ben; man soll in der Peripherie dieses Kreises einen Punkt n dergestalt bestimmen, daß, wenn man durch denselben und durch die Endpunkte a und b der Linie ab Sehnen mn und no zieht, diese in der Peripherie zwei Punkte m und o markiren, so daß, wenn man durch sie die Sehne mo zieht, diese mit ab parallel ist.

Auflösung.

Durch a lege man in beliebiger Richtung eine Sehne cd, trage an einen ebenfalls willkürlich groß genommenen Winkel gek die ab von e bis f, mache fg = ad, ei = ac, verbinde f mit i durch die if und ziehe gk # fi. Nun verlängere man die ab so weit bis al = ik geworden, lege von l an den Kreis die Tangente lm, ziehe durch m und a die Sehne mn, ferner durch n und b die Sehne no, wodurch in der Peripherie die Punkte m und o erhalten werden. Wird nun die Sehne mo gezogen, so ist sie parallel mit ab.

§. 347.

Aufgabe.

Es sind ein Kreis nebst drei außerhalb desselben in gerader Linie liegenden Punkten d, e und z (Fig. 343.) gegeben, man soll in der Peripherie einen Punkt x dergestalt bestimmen, daß die von ihm an die gegebenen Punkte d und e gezogenen geraden Linien xd und xe den Kreis so in l und y schneiden, daß die diese Punkte verbindende Linie ly, bei ihrer Verlängerung in den dritten gegebenen Punkt z fällt.

Auflösung.

Auf der Seite, wo d liegt, nehme man in der Peripherie einen beliebigen Punkt g an, ziehe von demselben die ae mache die Winkel c und n beliebig groß und lege durch die Punkte d, e und z eine Linie dz. Nun mache man ce = de, die ef = ae, die ci = eg, ziehe ei und lege fm # ei, auch trage man die im von e nach p. Jetzt mache man nr so groß wie die von z an den Kreis gelegte Tangente zh; mache ferner no = zp und oq = zh; ziehe or und qs # or.

Die r s setze man nun von z nach k, lege von k an den Kreis die Tangente k l, deren Berührungspunkt l ist. Zieht man nun von l nach z die l z, so wird davon die Peripherie in y geschnitten und wenn man durch d und l die d x oder durch e und y die e x zieht, so bestimmt man dadurch den verlangten Punkt x. Es liegen nun die Punkte d l x und e y x in gerader Linie; die Punkte l und y aber liegen so, daß die Verlängerung y z ihre Verbindungslinie l y den dritten gegebenen Punkt z trifft. Zieht man übrigens durch p und y die p v, so ist, wenn man l v zieht, diese parallel mit d z.

Zwölfte Abtheilung.

Konstruction gerader Linien und Kreise, welche Kreise und gerade Linien berühren; oder von den Berührungen.

§. 348.

Aufgabe.

Es sind zwei Punkte a und b gegeben, man soll daraus zwei Kreise beschreiben, die sich in einem Punkte c außerhalb berühren.

Auflösung.

Man verbinde die Punkte a und b durch eine gerade Linie a b (Fig. 344.), nehme auf dieser Linie einen beliebigen Punkt c an, beschreibe aus a mit a c und aus b mit b c Kreise, welche sich in c berühren werden.

§. 349.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Punkten a und b, zwei Kreise zu beschreiben, von denen der eine den andern innerhalb der Peripherie berührt.

Auflösung.

Die gegebenen Punkte a und b (Fig. 345.) verbinde man durch die gerade Linie a b, verlängere sie beliebig bis c und beschreibe aus a mit a c und aus b mit b c Kreise: es sind dies die verlangten; der Kreis um a berührt von innen die Peripherie des Kreises um b und zwar in c.

§. 350.

Aufgabe.

Zwei Parallelen **ab** und **cd** (Fig. 346), die von einer Dritten geschnitten werden, sind gegegeben, man soll einen Kreis ziehen, der diese gegebenen Linien berührt.

Auflösung.

Man halbire die Winkel **abd** und **bdc** durch die Linien **be** und **de**; verlängere diese Linien, bis sie sich in **e** schneiden, welches der Mittelpunkt des zu konstruirenden Kreises ist. Fällt man nun von **e** auf eine der gegebenen Linien, etwa auf **ab** ein Loth **ef**, so ist dies der Halbmesser eines Kreises, welcher die **ab** in **e**, die **bd** in **g** und die **cd** in **h** berührt.

§. 351.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie **ab** (Fig. 347.) und ein in ihr liegender Punkt **d** gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, so daß er die Linie **ab** in **d** berührt, zugleich aber auch durch einen außerhalb **ab** liegenden Punkt **e** geht, der aber so liegt, daß, wenn man ihn mit **d** verbindet, die **de** lothrecht auf **ab** steht.

Auflösung.

Man verbinde die beiden Punkte **d** und **e** durch die **de**, halbire sie in **c** und beschreibe mit **cd** aus **c** einen Kreis: er ist der, welcher der Aufgabe entspricht.

§. 352.

Aufgabe.

Eine gerade Linie **ab** (Fig. 48.) und ein innerhalb derselben liegender Punkt **c**, sind gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der die **ab** in **c** berührt und durch einen außerhalb der **ab** liegenden, aber bestimmten Punkt **d** geht. Der Punkt **d** liegt jedoch so, daß die ihn und **c** verbindende gerade Linie **cd** keine rechten Winkel mit **ab** bildet.

Auflösung.

In dem §. 38 ist die Auflösung dieser Aufgabe enthalten.

§. 353.

Aufgabe.

Es sind zwei Punkte **d** und **e**, nebst einer geraden Linie **ab** (Fig. 348.) gegeben, die so liegt, daß sie mit der Linie **de**, welche die gedachten Punkte verbindet, parallel geht; man soll einen Kreis beschreiben, welcher die gegebene Linie **ab** berührt und durch die Punkte **d** und **e** geht.

Auflösung.

Man halbire die **de** in **h**, fälle von **h** zu der **de** ein Loth, verlängere es, bis in **f** die **ab** getroffen wird, ziehe **ef**, halbire sie in **g**, errichte auf **ef** in **g** ein Loth, welches bei hinreichender Verlängerung die **fh** in **c** schneidet und dadurch den Mittelpunkt **c**, wie auch den Radius **cf** bestimmt, mit welchem ein Kreis um **c** beschrieben wird, der die **ab** in **f** berührt und durch die Punkte **d** und **e** geht.

§. 354.

Aufgabe.

Zwei Punkte **c** und **d**, nebst einer Linie **ab** (Fig. 44.) sind gegeben, man soll einen Kreis konstruiren, der die Linie berührt und durch die gegebenen Punkte geht, wenn übrigens noch bestimmt ist, daß die durch **cd** gehende Linie **ac** nicht parallel mit **ab** läuft.

Auflösung.

Der §. 35. enthält die Auflösung.

§. 355.

Aufgabe.

Zwei Parallellinien **ab** und **cd** (Fig. 349.) und ein Punkt **e** in einer dieser Linien sind gegeben, man soll einen Kreis schlagen, der diese Linien berührt und durch den Punkt **e** geht.

Auflösung.

Auf cd errichte man in e ein Loth ef, bis die ab davon erreicht wird, halbire es in g und beschreibe um g mit eg oder fg den verlangten Kreis.

§. 356.

Aufgabe.

Zwischen zwei parallele Linien ab und cd (Fig. 350.) soll ein Kreis gelegt werden, welcher diese Linien berührt und durch einen Punkt e geht, der der einen Linie ab näher als der andern liegt.

Auflösung.

Man errichte auf einer der Parallelen das Loth fg, halbire es in h, lege durch h die ik # cd und beschreibe mit gh aus dem gegebenen Punkt e einen Bogen, welchen die ik in l schneidet. Der Punkt l ist das Centrum des verlangten Kreises vom Halbmesser gh.

§. 357.

Aufgabe.

Zwischen zwei Parallelen ab und cd (Fig. 351.) liegt ein Punkt e, so daß er gleich weit von jeder dieser Linien entfernt ist. Man soll einen Kreis zeichnen, welcher die Linien berührt und durch den Punkt geht.

Auflösung.

Zwischen und auf die Parallelen ab und cd bringe man das Loth fg, halbire es in h, ziehe eh und mache ei = hg. Beschreibt man nun um e mit ei einen Kreis, so ist dadurch die Aufgabe gelöst.

§. 358.

Aufgabe.

Zwei nicht parallele Linien ab und cd (Fig. 352) sind nebst einem in einer dieser Linien liegenden Punkte e gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher die gedachten Linien berührt und durch den Punkt e geht.

Auflösung.

Da die Linien **ab** und **cd** nicht parallel sind, so müssen sie in einem Punkte **f** zusammenkommen und einen Winkel **afc** bilden. Man halbire nun diesen Winkel durch die **fg** und errichte in **e** auf **af** einen Perpendikel, welcher mit der **fg** in einem Punkte **g** zusammentrifft und in **g** den Mittelpunkt des mit **ge** zu beschreibenden Kreises bestimmt.

§. 359.

Aufgabe.

Es sind zwei nicht parallele, einen Winkel **a** bildende Linien **ab** und **ac** (Fig. 57.) nebst einem zwischen den Linien liegenden Punkte **d** gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Linien und den Punkt **d** berührt. Zugleich ist noch bestimmt, daß der gedachte Punkt der einen Linie, etwa der **ab**, näher als der andern liegt.

Auflösung.

Man sehe §. 47.

§. 360.

Aufgabe.

Man hat zwei nicht parallele Linien **ac** und **bc** (Fig. 353.) und einen zwischen denselben liegenden Punkt **d**, der von jeder der gedachten Linien gleich weit entfernt ist; man soll einen Kreis beschreiben, der die Linien und den Punkt **d** berührt.

Auflösung.

Man verbinde den Punkt **d** mit **c** durch eine gerade Linie **cd**, nehme auf **ac** einen Punkt **h** nach Willkür, errichte in demselben auf der **ac** ein Loth **gh**, ziehe es bis an die **cd** und beschreibe damit aus **g** einen Kreis, welcher die **ac** in **h** und die **bc** in **i** berührt. Ferner ziehe man **eh** und lege durch den gegebenen Punkt **d** die **ad** # **eh**, welche dann die **ac** in **a** trifft. Errichtet man nun auf **ac** in **a** einen Perpendikel **af**, so gibt derselbe in **cd** den Punkt **f** an, welcher der Mittelpunkt ei-

nes Kreises ist, der mit af beschrieben, die ac in a, die bc in b berührt und durch den Punkt d geht.

§. 361.

Aufgabe.

Ein Kreis ab (Fig. 354.), nebst einem in dessen Peripherie liegenden Punkte b und einem außerhalb derselben liegenden Punkte c ist gegeben, man soll einen andern Kreis konstruiren, welcher den erstern in b berührt und durch den Punkt c geht. Es ist übrigens bestimmt, daß eine durch b und c gehende Linie bc nicht in der Verlängerung des Durchmessers ab liegt.

Auflösung.

Den Durchmesser ab des gegebenen Kreises verlängere man beliebig, etwa bis f, verbinde die gegebenen Punkte b und c durch die bc, halbire sie in g und errichte auf ihr in g ein Loth ge, welches bei hinlänglicher Verlängerung, die Verlängerung der ab in e trifft. Beschreibt man nun um e mit be einen Kreis, so ist er der verlangte.

§. 362.

Aufgabe.

Es sind ein Kreis um c (Fig. 355) und zwei Punkte b und d gegeben, von denen der eine Punkt b in der Peripherie des gedachten Kreises, der andere Punkt d aber außerhalb desselben liegt. Letzterer Punkt liegt jedoch so, daß, wenn man ihn mit dem Punkte b verbindet, die verlängerte Verbindungslinie durch den Mittelpunkt c des gegebenen Kreises geht; man soll nun einen andern Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis in b berührt und durch den Punkt d geht.

Auflösung.

Man ziehe die Verbindungslinie bd der Punkte b und d; sie geht nach der Aufgabe in gerader Linie mit dem Durchmesser ab. Halbirt man nun bd in e und beschreibt man um e mit be oder de einen Kreis, so ist

er der gesuchte und er berührt den gegebenen Kreis in dem bestimmten Punkte b und geht zugleich durch den Punkt d.

§. 363.

Aufgabe.

Wenn zwei Punkte **a** und **c** und ein Kreis **ab** (Fig. 356.) gegeben sind und der eine Punkt **a** liegt in der Periphrie des gegebenen Kreises, der andere aber innerhalb desselben und zwar so, daß der Durchmesser **ab** des gegebenen Kreises von dem in der Peripherie gegebenen Punkte **a** gezogen, den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt **c** nicht trifft; einen Kreis zu ziehen, der die gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis berührt.

Auflösung.

Man verbinde die gegebenen Punkte **a** und **c** durch die **ac**, halbire diese Linie in **f** und errichte in diesem Punkt auf **ac** das Loth **ef**, wodurch, wenn man es gehörig verlängert, in **ab** der Punkt **e** bestimmt wird. Beschreibt man nun um **e** mit **ae** einen Kreis **acg**, so berührt derselbe den Kreis **ab** in **a** und er geht auch durch **c**.

§. 364.

Aufgabe.

Wenn zwei Punkte **b** und **c** (Fig. 357.) und ein Kreis gegeben sind und der Punkt **b** liegt in der Peripherie des gegebenen Kreises, der andere Punkt **c** aber liegt innerhalb der Fläche des Kreises **ab**, so daß der Durchmesser **ab** des gegebenen Kreises, der durch den in der Peripherie gegebenen Punkt **b** geht, ihn trifft; einen Kreis zu beschreiben, der die gegebenen Punkte **b** und **c**, folglich auch den gegebenen Kreis um **o** berührt.

Auflösung.

Wenn der Durchmesser **ab** des gegebenen Kreises gezogen ist, der nach der Aufgabe durch **c** geht, so halbire man **bc** in **d** und beschreibe mit **bd** um diesen Punkt **d** einen Kreis; er ist der verlangte, welcher den gegebenen Kreis berühren und durch den Punkt **c** gehen wird.

§. 365.

Aufgabe.

Es sind zwei außerhalb eines Kreises abgc (Fig. 358.) liegende Punkte d und e gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis auf der Seite, wo die Punkte liegen, berührt.

Auflösung.

Aus dem Punkt e lege man eine Tangente e g an den gegebenen Kreis, verbinde d mit e durch die de und verlängere diese Linie. Nun trage man an einen beliebig großen Winkel k die ik = de, die hi = eg und die kl auch = eg, ziehe il und lege durch h die hm # il. Jetzt mache man ef = lm und lege von f an a eine Tangente a f an den Kreis, verbinde a mit e, wodurch der gegebene Kreis abgc in b geschnitten wird. Legt man endlich durch die Punkte bde (§. 27.) einen Kreis, so ist er der verlangte, welcher den gegebenen Kreis in b berührt und durch die Punkte d und e geht.

Zieht man übrigens durch b und d die cd und verbindet man a mit c, so ist ac # de.

§. 366.

Aufgabe.

Man hat zwei außerhalb eines Kreises abg (Fig. 359.) liegende Punkte d und e und man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis auf der den Punkten d und e entgegengesetzten Seite berührt und durch diese Punkte geht.

Auflösung.

Die gegebenen Punkte de verbinde man durch die de und lege von d eine Tangente dg an den Kreis. Nun nehme man einen beliebig großen Winkel h, trage darauf die de von h nach i, mache ik = dg und auch hm = dg; ziehe im und mache kl # im. Nun trage man lm von d nach f und lege von f an den gegebenen Kreis eine Tangente b f. Wird endlich durch d und b eine gerade Linie gelegt und verlängert, bis sie die Peripherie des gegebenen Kreises in a trifft, so ist der durch

die drei Punkte a, d und e gelegte Kreis (§. 27.) der verlangte.

§. 367.

Aufgabe.

Ein Kreis abc (Fig. 360.) und zwei Punkte d und e, welche beide innerhalb des gegebenen Kreises liegen, sind gegeben. Man soll einen Kreis konstruiren, der durch die gedachten Punkte geht und den Kreis abc in demjenigen Halbkreise berührt, in welchem die gegebenen Punkte liegen.

Auflösung.

Durch d lege man eine Sehne gh in beliebiger Lage, so daß sie auch der Durchmesser des gegebenen Kreises seyn kann, nehme einen beliebig großen Winkel l und trage de von l nach k, ferner dg von k nach i und dh von l nach m. Nun ziehe man km und durch i die in # km und trage mn von d nach f in die Verlängerung der de. Von f lege man an den gegebenen Kreis eine Tangente bf und ziehe von b durch den gegebenen Punkt d eine Sehne ab. Beschreibt man nun durch die Punkte a, d und e einen Kreis ade (§. 27.), so ist er der verlangte: er berührt den gegebenen Kreis in einem Punkt a, geht durch die Punkte d und e und liegt in demselben Halbkreise, in welchem die gegebenen Punkte liegen.

§. 368.

Aufgabe.

Ein Kreis acg (Fig. 361.) und zwei Punkte d und e in demselben sind gegeben, man soll einen andern Kreis dergestalt in den gegebenen ziehen, daß er jenen nicht in dem Halbkreise berühre, in welchem die gegebenen Punkte d und e liegen.

Auflösung.

Die gegebenen Punkte d und e werden durch eine gerade Linie de verbunden und durch d wird eine beliebige Sehne ab gelegt. An einem willkürlich großen Winkel h, mache man hi = de, ik = bd, hl = ad, ziehe il und mache km # il. Nun verlängere man de

so weit, daß d f = l m werde, lege von f an den Kreis eine Tangente c f und ziehe durch c und d eine Sehne c g. Legt man nun durch d, e und g einen Kreis (§. 27.) d e g, so berührt dieser den gegebenen Kreis in g und geht durch d und e.

§. 369.

Aufgabe.

Zwei ungleiche Kreise um a und b (Fig. 362) und ein Punkt c außerhalb derselben sind gegeben, man soll einen Kreis c d e n beschreiben, der die gegebenen Kreise außerhalb berührt und durch den gegebenen Punkt c geht.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie a b, verlängere sie, bis die Peripherie des größern Kreises in k getroffen wird und auf der Seite, wo der kleinere Kreis liegt, verlängere man sie beliebig. Nun ziehe man in dem größern Kreise, auf der Seite, wo der Punkt c liegt, einen Halbmesser a d in beliebiger Lage; mache den Radius b l # a d, ziehe durch die Punkte d und l eine Linie, welche die Verlängerung der Centrallinie in o trifft und ziehe c o. Nun mache man m o = o c, o s = o h, u m = o k, ziehe o u und mit ihr die s t parallel; trage die t u von o nach n, setze c n von v nach w, mache x w = der Tangente c g und v y = c g; ziehe w y nach x z # w y und trage y z von c nach q. Legt man nun von q die Tangente q r an den Kreis um b und verbindet man r mit c durch die c r, so erhält man den Punkt e in der Peripherie des Kreises um b. Legt man endlich durch c, e und n einen Kreis (§. 27.), so wird derselbe die gegebenen Kreise berühren und durch die Punkte c und n gehen.

§. 370.

Aufgabe.

Es sind zwei ungleich große Kreise um a und b (Fig. 363.), nebst einem Punkt c gegeben, welcher außerhalb dieser Kreise liegt; man soll einen Kreis konstruiren, welchen die gegebenen Kreise von innen berühren und der durch den gegebenen Punkt c geht.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie ab, verlängere sie bis k an die Peripherie des größeren Kreises, ziehe in beliebiger Lage auf der dem gegebenen Punkte c entgegengesetzten Seite einen Halbmesser ad, mache bm # ad und lege durch d und m eine gerade Linie, welche bei hinreichender Verlängerung die Verlängerung der bk in o schneiden wird. Nun ziehe man co, mache ef = oc, fg = oh und ie = ok; ziehe fi, ferner gl # fi und trage li von o nach n. Von c lege man an den kleinern Kreis die Tangente cp, mache er = cn, rs = cp und auch et = cp, ziehe rt und mit ihr die su parallel. Wird nun tu von c nach q getragen, von q aus eine Tangente qr an den kleineren Kreis gelegt und durch c und r die cs bis an die Peripherie des Kreises gezogen, so erhält man den Punkt s, welcher so liegt, daß wenn man durch denselben, so wie durch c und n einen Kreis cnsd legt, die Aufgabe gelöst ist.

§. 371.

Aufgabe.

Zwei ungleiche Kreise um a und b (Fig. 364.) und ein Punkt c außerhalb derselben sind gegeben, man soll einen Kreis ziehen, der durch den gegebenen Punkt geht und von einem der gegebenen Kreise auswendig, von dem andern derselben aber inwendig berührt wird.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie ab und verlängere sie auf beiden Seiten bis an d und an e; ziehe unter beliebiger Richtung den Radius af, mache bg # af und ziehe fg. Jetzt ziehe man von c bis h eine gerade Linie ch, mache mn = ch, on = hl, mq = dh, ziehe nq und mache op # nq; die pq aber trage man in die Verlängerung der ch von h nach k. Nun wird von k an den Kreis um b eine Tangente kr gelegt, vs = kr, ts = ck, tu = kr gemacht, tv gezogen und uw # tv gelegt. Trägt man nun vw von k nach x, legt man von x die Tangente xy an den Kreis um b und verbindet man den Berührungspunkt y mit k, so wird dadurch der Punkt z in der Peripherie des Kreises um b bestimmt.

Beschreibt man nun durch c, k und z einen Kreis fkzc (§. 27.), so ist er der verlangte.

§. 372.

Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche Kreise um a und c (Fig. 365.) und ein Punkt d gegeben, der in der Centrallinie ac und in der Peripherie des einen Kreises liegt; man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Kreise und den Punkt d berührt.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie ac, welche durch den gegebenen Punkt d geht und die Peripherie des Kreises um c und e schneidet. Beschreibt man nun aus b mit $bd = \frac{de}{2}$ einen Kreis, so berührt er beide gegebene Kreise und geht zugleich durch den Punkt d.

§. 373.

Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche Kreise um a und b (Fig. 366.) nebst einem Punkt d gegeben, welcher wohl in der Peripherie des einen Kreises um b, aber nicht in der Centrallinie der Kreise liegt; man soll einen Kreis konstruiren, der beide Kreise außerhalb und zwar den einen Kreis in dem gegebenen Punkt d berührt.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkt d ziehe man den Halbmesser bd und verlängere ihn auf die Seite, wo der Punkt d liegt, mache den Halbmesser af # bd und ziehe df, wodurch die Peripherie des Kreises um a in e geschnitten wird. Legt man nun durch a und e eine Linie bis in die Verlängerung der bd, so erhält man den Durchschnittspunkt c, aus welchem man mit cd den verlangten Kreis beschreibt.

§. 374.

Aufgabe.

Zwei ungleich große Kreise um a und b (Fig. 367.) sind nebst einem Punkt d gegeben,

welcher in der Peripherie des einen Kreises, aber nicht in der Centrallinie liegt; man soll einen Kreis beschreiben, welchen derjenige Kreis, in dessen Peripherie der Punkt d liegt, außerhalb, der andere aber inwendig berührt und welcher durch den gegebenen Punkt d geht.

Auflösung.

Den von dem gegebenen Punkt d gezogenen Halbmesser a d verlängere man, mache b f # a d und ziehe d f bis e. Verlängert man nun den von e gehenden Radius b e, bis diese Verlängerung die von a d trifft, so erhält man den Durchschnitt c, welcher das Centrum des mit c d zu beschreibenden Kreises ist, der den gegebenen Kreis im gegebenen Punkte d und auch den Kreis um b berührt.

§. 375.

Aufgabe.

Es sind zwei gleich große Kreise um a und b (Fig. 368.) nebst einem außerhalb derselben (nicht in der Centrallinie) liegenden Punkte c gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der durch den gegebenen Punkt geht und von den gegebenen Kreisen außerhalb berührt wird.

Auflösung.

Um den gegebenen Punkt c beschreibe man mit dem Halbmesser a e = b f einen Kreis, ziehe die Centrallinie a b, lege von a an den Kreis um c eine Tangente a h, mache k l = a b, l m und o k = a h, ziehe l o und m n # l o. Nun wird n o von a nach i gesetzt, von i eine Tangente i p an den Kreis um c gezogen und durch a und p die Linie a p und zwar so weit gezogen, bis sie die Peripherie des Kreises um c in g trifft. Jetzt halbire man die Winkel b a g und a b g durch die Linien a d und b d und ziehe von dem Berührungspunkt g nach d die d g. Beschreibt man nun mit c d aus d einen Kreis, so wird derselbe die gegebenen Kreise in e und f berühren und durch den Punkt c gehen.

§. 376.

Aufgabe.

Zwei gleiche Kreise um a und b (Fig. 369.) nebst einem außerhalb derselben liegenden

Punkte d, der nicht in der Centrallinie liegt, sind gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, den die gegebenen Kreise inwendig berühren und der durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung.

Man beschreibe mit dem Halbmesser der gegebenen Kreise um den Punkt d einen Kreis, ziehe die Centrallinie a b, lege von a eine Tangente a e an den Kreis, mache h i = a b, i k und h m = a e, ziehe i m und lege k l # i m. Nun trage man l m von a nach h, lege von h eine Tangente h n an den Kreis um d und ziehe a n, wodurch der Punkt g in der Peripherie des Kreises um d erhalten wird. Sucht man nun den Mittelpunkt c eines Kreises, der durch a, g und h beschrieben werden kann (§. 27.) und zieht man c d, so ist diese Linie der Halbmesser des um c zu beschreibenden gesuchten Kreises, welcher die Kreise a und b innerhalb berühren und durch den Punkt d gehen wird.

§. 377.

Aufgabe.

Zwei gleiche Kreise um a und b (Fig. 370.) nebst einem außerhalb dieser Kreise liegenden Punkte d sind gegeben; man soll einen Kreis konstruiren, der den einen der gegebenen Kreise auswendig, den andern inwendig berührt und durch den gegebenen Punkt d geht.

Auflösung.

Um den gegebenen Punkt d beschreibe man einen Kreis, dessen Halbmesser dem der gegebenen Kreise gleich ist und schlage um b mit 2 • b g ebenfalls einen Kreis, ziehe die Centrale b d, verlängere sie auf der Seite des kleinern Kreises unbestimmt, auf der andern Seite aber bis m an die Peripherie des mit 2 b g beschriebenen Kreises. Nun mache man b z in beliebiger Lage, ziehe α d # b z und durch z und α lege man eine gerade Linie, deren Verlängerung die verlängerte b d in l trifft. Ferner ziehe man a l, mache u x = a l, x y = l k, u v = l m, ziehe v x und w y # v x. Die v w trage man von l nach n, mache f h = a n, h i = a o (welches eine Tangente von a an den Kreis ist), f s = a o, ziehe h s, mache

it # hs, trage st von a nach p, lege von p eine Tangente pq an den Kreis um d und ziehe aq. Hierdurch wird ein Punkt r in der Peripherie des Kreises um d bestimmt, der so liegt, daß, wenn man zu ihm und zu den Punkten a und n das Centrum c eines Kreises sucht (§. 27.), der diese Punkte berührt, eben dieses Centrum c auch das des verlangten mit cg zu beschreibenden Kreises ist.

§. 378.

Aufgabe.

Zwei nicht parallele Linien ac und bc (Figur 371.) sind nebst einem Kreise um d gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der von dem gegebenen Kreise auswendig berührt wird und welcher die Linien ab und bc berührt.

Auflösung.

Die beiden Linien müssen sich, da sie nicht parallel sind, in einem Punkte c treffen. Auf ac, in einem beliebigen Punkte c derselben, errichte man ein Loth ci = dem Radius dh des gegebenen Kreises und ziehe durch i die eg # ac. Mit der Entfernung ci lege man die fg # bc, halbire den Winkel egf durch die lg, nehme auf lg den Punkt o beliebig, fälle von o auf eg das Loth om, mache on = om, ziehe no und lege von d die dk # no. Hierdurch erhält man den Punkt k, den man mit dem Mittelpunkte d des gegebenen Kreises verbindet, wodurch der Radius hk des gesuchten Kreises bestimmt wird, der durch d geht und die Linien ac und bc berührt.

§. 379.

Aufgabe.

Zwei nicht parallele Linien ac und bc (Figur 372.), die bei c zusammentreffen, und ein Kreis um d sind gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Linien berührt und von dem gegebenen Kreise inwendig berührt wird.

Auflösung.

Auf ac und auch auf bc errichte man Lothe wie eg, welche dem Radius dh des gegebenen Kreises um d

gleich sind und ziehe durch g ꝛc. die fg # ac und die hg # bc; halbire durch die gl den Winkel hgf, nehme auf lg einen Punkt m beliebig, fälle von demselben auf fg das Loth mn, mache om = mn, ziehe durch den Mittelpunkt d des gegebenen Kreises die ik # om, verlängere sie so weit, bis die lc in k davon getroffen wird, verlängere die kd bis an h in der Peripherie um d und beschreibe aus k mit hk den verlangten Kreis, der die Linien ac und bc berührt und von dem Kreise um d innerhalb bei h berührt wird.

§. 380.

Aufgabe.

Ein außerhalb eines geradlinigen spitzen Winkels c (Fig. 373.) liegender Kreis um d, welcher den einen Schenkel ac des Winkels in g berührt, ist gegeben; man soll zwischen die Schenkel ac und bc dieses Winkels einen Kreis beschreiben, welcher die gedachten Schenkel und den Kreis berührt.

Auflösung.

Man halbire den Winkel acb durch die cf; verbinde durch die dg den Berührungspunkt g mit dem Centrum d, verlängere die dg so weit, bis die Halbirungslinie cf in e getroffen wird: e ist dann der Mittelpunkt und eg der Halbmesser desjenigen Kreises, welcher die ac, bc und den Kreis um d in g berührt.

§. 381.

Aufgabe.

Es sind zwei Parallelen ab und de (Fig. 374.) nebst einem Kreise um c gegeben, welcher der ab näher, wie der de ist; man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Linien berührt und von dem gegebenen Kreise von außen berührt wird.

Auflösung.

Zwischen den Parallelen errichte man das Loth fg, halbire es bei h und ziehe durch den Punkt h die lm # ab. Nun nehme man die fh + ck in den Zirkel und beschreibe damit aus c einen Bogen, wodurch die lm in

n getroffen wird. Beschreibt man nun aus n mit k n den Kreis f k g l, so wird dieser den Kreis um c in k und die Parallelen in o und p berühren.

§. 382.

Aufgabe.

Zwei Parallelen a b und d e (Fig. 375.) nebst einem Kreise um c (welcher der a b näher, als der d e liegt) sind gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher die Parallelen berührt und von dem gegebenen Kreis inwendig berührt wird.

Auflösung.

Auf die Parallelen bringe man eine Perpendikuläre f g, halbire sie in m, ziehe durch m die Linie h k ∥ a b, nehme f m — c l in den Zirkel und beschreibe damit aus dem Mittelpunkte c des gegebenen Kreises einen Bogen, welcher die h k in n schneidet. Wird nun aus n mit m f oder mit der Verlängerung der c l bis n, das ist mit l n ein Kreis beschrieben, so berührt derselbe die Parallelen a b und c d und wird von dem gegebenen Kreise um c innerhalb bei l berührt.

§. 283.

Aufgabe.

Es sind zwei Parallelen a b und d e (Fig. 376.) und ein Kreis um c gegeben, welcher eine a b der gegebenen Linien in f berührt; man soll einen Kreis beschreiben, der die Linien a b und d e und den gegebenen Kreis berührt.

Auflösung.

An den Berührungspunkt f der a b mit dem gegebenen Kreise aus c ziehe man den Halbmesser c f, verlängere denselben, bis die andere Linie d e davon in g getroffen wird und halbire die f g in h. Beschreibt man nun um h mit g h einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

§. 384.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis um c (Fig. 377.), eine außerhalb des Kreises liegende gerade Linie a b

und ein Punkt d gegeben, welcher weder im Kreise, noch in der Linie liegt; man soll einen Kreis beschreiben, der den Punkt d und die Linie ab berührt und von dem gegebenen Kreise auswendig berührt wird.

Auflösung.

Auf die gegebene Linie **a b** fälle man durch **c** das Loth **e g**, verbinde den gegebenen Punkt **d** mit **e** durch die **d e**, mache **i k = d e**, **k l = e g**, **i n = e h**, ziehe **k n**, mache **l m # k n**, trage die **m n** von **e** nach **f**, verlängere die **e d**, bis die Verlängerung der **a b** in **o** geschnitten wird, beschreibe unter **o f** einen Halbkreis, errichte in **d** auf **o f** das Loth **d p**, beschreibe aus **o** mit **o p** den Bogen **p q**, ziehe **d q**, halbire diese Linie in **r** und errichte aus diesem Punkt auf **d q** ein Loth; ziehe **f q**, halbire sie in **s** und errichte aus diesem Punkt einen Perpendikel auf der **f q**; beide Lothe treffen sich in **t**, welches der Mittelpunkt des verlangten Kreises ist, der mit dem Halbmesser **d t** beschrieben wird.

§. 385.

Aufgabe.

Es soll ein Kreis beschrieben werden, der von einem gegebenen Kreis um **c** innerhalb berührt wird und welcher eine gegebene gerade Linie **a b** (Fig. 378.) und einen gegebenen Punkt **d** berührt.

Auflösung.

Durch **c** fälle man auf die **a b** ein Loth **c f**, verbinde **d** mit **g**, verlängere die Linien **d g** und **a b**, bis sie in **o** zusammenkommen; mache **h i = d g**, **i k = e g**, **h l = f g**, ziehe **i l**, ferner **k m # i l** und mache **g n = l m**. Ueber **d o** beschreibe man einen Halbkreis, errichte darauf in **n** den Perpendikel **n p**, beschreibe aus **o** mit **o p** den Bogen **p q**, ziehe **d q**, errichte in deren Halbirungspunkte **s** auf ihr das Loth **s t**, ziehe **q n**, errichte ebenfalls auf ihr in ihrem Halbirungspunkte **r** ein Loth **r t**, welches das erstere in **t** treffen wird und den Mittelpunkt **t** bestimmt, der zu dem verlangten Kreise gehört, welchen man mit dem Halbmesser **t q** beschreiben kann.

§. 386.

Aufgabe.

Ein Kreis um **c**, eine gerade Linie **ab** (Fig. 379.) und ein Punkt **d** sind gegeben und es ist bestimmt, daß eben dieser Punkt, der in der Peripherie des Kreises liegt, eine solche Lage hat, daß ein von ihm auf die gegebene Linie **ab** gefälltes Loth **de** durch das Centrum **c** des gegebenen Kreises geht. Man soll nun einen Kreis konstruiren, der den erstern in **d** und die gerade Linie **ab** berührt.

Auflösung.

Man ziehe durch **c** und **d** die **ce**, halbire **de** in **f** und beschreibe aus **f** mit **df** einen Kreis: er ist der verlangte.

§. 387.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis um **c** (Fig. 380.), eine außerhalb desselben liegende gerade Linie **ab** und ein Punkt **d** in der Peripherie des Kreises gegeben und es ist bestimmt, daß der Punkt **d** nicht im Perpendikel liegt, welcher vom Centrum **c** auf die **ab** gefällt wird; man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis im Punkte **d** und die gerade Linie **ab** berührt.

Auflösung.

Durch **c** fälle man auf die **ab** den Perpendikel **eh**, ziehe durch **d** und **h**, ferner durch **d** und **c** die geraden Linien **fh** und **cg** und zwar erstere so weit, bis von ihr die **ab** in **f** getroffen wird und letztere mache man so lang, daß sie in **g** von dem in **f** auf **ab** errichteten Lothe **fg** erreicht wird. Der Punkt **g** ist das Centrum und **dg**, so wie **fg** sind Halbmesser des verlangten Kreises.

§. 388.

Aufgabe.

Ein Kreis um **c** (Fig. 381.) und ein Punkt **d** in einer geraden Linie **ab** ist gegeben und es ist festgesetzt, daß der Punkt **d** so in **ab** liegt, daß eine denselben mit dem Centrum **c** verbin-

bende Linie cd lothrecht auf ab steht; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die gegebene Linie in dem Punkte d berührt.

Auflösung.

Man fälle das Loth c d von c auf a b, halbire d e in f und beschreibe aus e mit d f einen Kreis: er ist der verlangte.

§. 389.

Aufgabe.

Ein Kreis um c (Fig. 382.), eine gerade Linie a b und ein Punkt d sind gegeben und es liegt dieser Punkt so, daß ihn ein Perpendikel vom Mittelpunkte c des Kreises auf die ab gefällt nicht trifft; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die gegebene Linie im Punkte d berührt.

Auflösung.

In d errichte man auf a b den Perpendikel d f und ziehe den Halbmesser c e ihm parallel. Von e ziehe man nach d die Linie d e, welche den Kreis um c in g schneidet. Zieht man nun von dem Mittelpunkte c durch g eine gerade Linie c g, so wird deren Verlängerung das in d errichtete Loth in f treffen, welches der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, der mit dem Halbmesser f g oder d f beschrieben wird.

§. 390.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis um c (Fig. 383.), eine gerade Linie a b und ein Punkt f gegeben ist und der gegebene Kreis berührt die gegebene Linie in irgend einem Punkte d dergestalt, daß ein Perpendikel c f aus dem Mittelpunkte c des gegebenen Kreises auf die gegebene Linie a b gefällt, den gegebenen Punkt trifft, wo wird das Centrum e eines Kreises liegen, der den gegebenen Kreis, die gegebene Linie und den gegebenen Punkt berührt?

Auflösung.

Man nehme den Perpendikel **cf** auf **ab**, welcher den Mittelpunkt **c** des gegebenen Kreises, mit dem gegebenen Punkte **f** verbindet und den Kreis in **d** schneidet und halbire dessen Segment **df** in **e**: es ist dieser Punkt das Centrum des mit **de** zu beschreibenden verlangten Kreises.

§. 391.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis um **c** (Fig. 384.) eine gerade Linie **ab** und ein Punkt **d** gegeben ist und der Kreis berührt die Linie **ab** in irgend einem Punkt **e**, der gegebene Punkt **d** liegt aber so, daß ihn das Loth **ce** aus dem Mittelpunkte **c** des gegebenen Kreises auf die gegebene Linie **ab** nicht trifft, wo liegt das Centrum eines Kreises, der die gegebene Linie, den gegebenen Punkt und den gegebenen Kreis berührt?

Auflösung.

Man ziehe von **c** auf **ab** das Loth **ce**, verbinde **d** mit **e**, errichte auf **de** in ihrem Halbirungspunkte **g** ein Loth, welches bei genugsamer Verlängerung die Verlängerung der **ce** in **f** trifft. Beschreibt man nun aus **f** mit **ef** einen Kreis, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 392.

Aufgabe.

Man hat zwei gleiche Kreise um **c** und **d** (Fig. 385.) und eine gerade Linie **ab**; es soll ein Kreis beschrieben werden, der die gegebene Linie berührt und welchen die gegebenen Kreise auswendig berühen.

Auflösung.

Man ziehe die **ef** # **ab** und zwar so, daß ihr Abstand von der **ab** dem Radius **ci** der gegebenen Kreise gleich sey; ziehe die Centrallinie **cd**, verlängere sie, bis die Verlängerung von **ef** in **k** getroffen wird. Ueber **ck** beschreibe man einen Halbkreis, errichte in **d** das Loth **dh** bis an die Peripherie, ziehe **hk** und beschreibe damit aus **k** einen Bogen **hu**, bis er die **ek** in **n** trifft. Nun beschreibe

dende Linie cd lothrecht auf ab steht; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die gegebene Linie in dem Punkte d berührt.

Auflösung.

Man fälle das Loth cd von c auf ab, halbire de in f und beschreibe aus e mit df einen Kreis: er ist der verlangte.

§. 389.

Aufgabe.

Ein Kreis um c (Fig. 382.), eine gerade Linie ab und ein Punkt d sind gegeben und es liegt dieser Punkt so, daß ihn ein Perpendikel vom Mittelpunkte c des Kreises auf die ab gefällt nicht trifft; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die gegebene Linie im Punkte d berührt.

Auflösung.

In d errichte man auf ab den Perpendikel df und ziehe den Halbmesser ce ihm parallel. Von e ziehe man nach d die Linie de, welche den Kreis um c in g schneidet. Zieht man nun von dem Mittelpunkte c durch g eine gerade Linie cg, so wird deren Verlängerung das in d errichtete Loth in f treffen, welches der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, der mit dem Halbmesser fg oder df beschrieben wird.

§. 390.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis um c (Fig. 383.), eine gerade Linie ab und ein Punkt f gegeben ist und der gegebene Kreis berührt die gegebene Linie in irgend einem Punkte d dergestalt, daß ein Perpendikel cf aus dem Mittelpunkte c des gegebenen Kreises auf die gegebene Linie ab gefällt, den gegebenen Punkt trifft, wo wird das Centrum e eines Kreises liegen, der den gegebenen Kreis, die gegebene Linie und den gegebenen Punkt berührt?

Auflösung.

Man nehme den Perpendikel **cf** auf **ab**, welcher den Mittelpunkt **c** des gegebenen Kreises, mit dem gegebenen Punkte **f** verbindet und den Kreis in **d** schneidet und halbire dessen Segment **df** in **e**: es ist dieser Punkt das Centrum des mit **de** zu beschreibenden verlangten Kreises.

§. 391.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis um **c** (Fig. 384.) eine gerade Linie **ab** und ein Punkt **d** gegeben ist und der Kreis berührt die Linie **ab** in irgend einem Punkt **e**, der gegebene Punkt **d** liegt aber so, daß ihn das Loth **ce** aus dem Mittelpunkte **c** des gegebenen Kreises auf die gegebene Linie **ab** nicht trifft, wo liegt das Centrum eines Kreises, der die gegebene Linie, den gegebenen Punkt und den gegebenen Kreis berührt?

Auflösung.

Man ziehe von **c** auf **ab** das Loth **ce**, verbinde **d** mit **e**, errichte auf **de** in ihrem Halbirungspunkte **g** ein Loth, welches bei genugsamer Verlängerung die Verlängerung der **ce** in **f** trifft. Beschreibt man nun aus **f** mit **ef** einen Kreis, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 392.

Aufgabe.

Man hat zwei gleiche Kreise um **c** und **d** (Fig. 385.) und eine gerade Linie **ab**; es soll ein Kreis beschrieben werden, der die gegebene Linie berührt und welchen die gegebenen Kreise auswendig berühen.

Auflösung.

Man ziehe die **ef** # **ab** und zwar so, daß ihr Abstand von der **ab** dem Radius **ci** der gegebenen Kreise gleich sey; ziehe die Centrallinie **cd**, verlängere sie, bis die Verlängerung von **ef** in **k** getroffen wird. Ueber **ck** beschreibe man einen Halbkreis, errichte in **d** das Loth **dh** bis an die Peripherie, ziehe **hk** und beschreibe damit aus **k** einen Bogen **hn**, bis er die **ek** in **n** trifft. Nun beschreibe

man durch cd und n einen Kreis (§. 27.) und verbinde dessen Centrum g mit c. Wird nun aus g mit gi ein Kreis beschrieben, so berührt derselbe die gegebenen Kreise in i und m und die gegebene Linie in l.

§. 393.

Aufgabe.

Wenn zwei gleiche Kreise um a und b (Fig. 386) und eine gerade Linie cd gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, der die gegebene Linie berührt und von den gegebenen Kreisen inwendig berührt wird.

Auflösung.

Man ziehe die Linie ef mit cd parallel und zwar so, daß ihr Abstand von der cd dem Radius der gegebenen Kreise gleich ist, ziehe die Centrallinie a b, verlängere sie, bis die ebenfalls verlängerte ef davon in g getroffen wird. Nun beschreibe man unter ag einen Halbkreis, errichte in b auf ag das Loth bi, ziehe gi, beschreibe damit aus g einen Bogen ik, wodurch in ef der Punkt k bestimmt wird und lege durch die Punkte a, b und k einen Kreis (§. 27.). Zieht man nun durch h und a die hl und beschreibt man damit aus h einen Kreis lmn, so berühren ihn die gegebenen Kreise innerhalb bei l und m und die cd wird von demselben in n, wie die Aufgabe verlangt, berührt.

§. 394.

Aufgabe.

Wenn zwei gleiche Kreise um a und b (Fig. 387) und eine gerade Linie cd gegeben sind, einen Kreis zu zeichnen, der die gegebene Linie berührt und von dem einen der gegebenen Kreise (von dem um b) von außen, von dem andern (von dem um a) inwendig berührt wird.

Auflösung.

Zwischen cd und die gegebenen Kreise lege man die ef # id, so daß der Abstand beider Linien dem Halbmesser bv der gegebenen Kreise gleich ist; mache bg = vw, beschreibe mit bg um b einen Kreis, fälle durch b das Loth gh auf ef, ziehe von g durch a die gf, bis die

(Verlängerung der) ef in f getroffen wird. Ferner mache man kl = ag, lm = gh, kn = gi, ziehe ln mache mo # ln, setze on von g nach p, beschreibe unter fp einen Halbkreis, errichte in a auf fp einen Perpendikel aq, ziehe fq, beschreibe damit aus f den Bogen qr, wodurch auf ef der Punkt r bestimmt wird. Nun lege man durch p, a und r einen Kreis, verbinde dessen Mittelpunkt s mit dem Centrum b und beschreibe aus s mit st einen Kreis, welcher den einen gegeben um b in t, den andern gegebenen um a in u und die Linie cd in v berührt, wie die Aufgabe verlangt.

§. 395.

Aufgabe.

Zwei ungleiche Kreise α und β (Fig. 388.) und eine gerade Linie ab sind gegeben, man soll einen Kreis konstruiren, welcher die gegebene Linie berührt und von den gegebenen Kreisen auswendig berührt wird.

Auflösung.

In einer Entfernung, welche dem Halbmesser ct des kleinen Kreises gleich ist, lege man die ef mit ab parallel und beschreibe mit dem Radius dg = dw — ct um d einen Kreis, fälle durch d auf ef die gi, ziehe cg, trage cg von k nach l, mache lm = gi, nk = gh, ziehe die ln, mache om # ln und die gp = om. Nun beschreibe man, nachdem cg so weit verlängert worden, bis die ef in e getroffen wurde, über ep einen Halbkreis, errichte in c auf ep das Loth cq, ziehe eq und beschreibe damit aus e den Bogen qr. Legt man nun durch die drei Punkte c, p und r einen Kreis γ und zieht man die sc, so wird davon die Peripherie des Kreises α in t geschnitten und der Halbmesser st ist bestimmt, mit welchem man aus s den verlangten Kreis μ beschreibt, welcher den Kreis α in t, den Kreis β in ν und die Linie ab in u berührt.

§. 396.

Aufgabe.

Zwei ungleiche Kreise α und β (Fig. 389.) und eine gerade Linie ab sind gegeben, man

soll einen Kreis γ beschreiben, der die gegebene Linie berührt und von den gegebenen Kreisen inwendig berührt wird.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte d des größern Kreises β, mit dv = dw — cx einen Kreis und lege uo # ab in einer Entfernung, welche dem Halbmesser cx des kleinern Kreises gleich ist. Nun ziehe man die Tangente cg und verlängere sie so weit, bis die uo oder deren Verlängerung in o getroffen wird, fälle durch d auf uo das Loth ef, mache lh = fg, ih = cg, ik = eg, ziehe il, mache mk # il, trage die ik von g nach n, beschreibe über co einen Halbkreis, errichte in n auf co das Loth np, ziehe op, beschreibe damit aus o, den Bogen pq, ziehe cq und qn, halbire diese Linie in s und r, errichte in diesen Punkten auf cq und qn Lothe, wodurch bei deren gehörigen Verlängerung der Punkt t erhalten wird; und es ist um t das Centrum eines mit ct zu beschreibenden Kreises, der durch c geht und die ou in q, so wie den Kreis gev in v berührt; t ist aber auch der Mittelpunkt des mit ty zu beschreibenden Kreises γ, welcher innerhalb von den gegebenen Kreisen α und β berührt wird und die gegebene Linie ab berührt.

§. 397.

Aufgabe.

Zwei ungleiche Kreise α um d (Fig. 390.) und β um c, so wie eine gerade Linie ab sind gegeben, man soll einen Kreis γ so beschreiben, daß er von dem größern der gegebenen Kreise β innerhalb, von dem kleinern Kreise α außerhalb berührt werde und daß er die ab in irgend einem Punkte berührt.

Auflösung.

Um den kleinern Kreis α beschreibe man aus d mit di = du + cx einen Kreis, ziehe fe # ab in einer Entfernung, die dem Halbmesser cx des größern Kreises gleich ist, fälle durch d die ig auf ef; ziehe ic, verlängere diese Linie bis k, wo sie die ef oder deren Verlängerung trifft; mache lm = ic, mn = ig, lo = hi, ziehe mo, mache np # mo, trage op von i nach q,

beschreibe unter k q einen Halbkreis, errichte auf k q in c das Loth c r, ziehe k r, beschreibe damit aus k den Bogen r s und lege durch c, q und s einen Kreis, dessen Mittelpunkt t ist und welcher den mit d i beschriebenen Kreis, so wie die Linie e f berühren, zugleich aber auch durch den Punkt c gehen wird. Zieht man nun von d nach dem Centrum t die gerade Linie d t, so schneidet sie die Peripherie des gegebenen kleinern Kreises α in u und es ist t u der Halbmesser des gesuchten Kreises γ, welcher bei w die gegebene Linie a b berührt, bei u von dem kleinern Kreise α außerhalb und bei v von dem größern Kreise β innerhalb berührt wird, wie die Aufgabe verlangt.

§. 398.

Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche Kreise α und β (Fig. 391) und eine gerade Linie a b gegeben, man soll einen Kreis γ beschreiben, der die Linie a b berührt und von dem größern Kreise β auswendig, von dem kleinern α aber innerhalb berührt wird.

Auflösung.

Um den Mittelpunkt c des kleinern Kreises α beschreibe man mit dem Halbmesser c h = d w + c t einen Kreis, ziehe e f # a b, in einer Entfernung, welche dem Halbmesser d w des gegebenen größern Kreises gleich ist. Nun mache man h k durch c lothrecht auf e f und ziehe durch d und g die d g, deren Verlängerung in die der e f oder bei n in diese Linie selbst fällt. Ferner mache man l p = d g, p q = g h, l n = k g, ziehe n p, mache o q # n p, trage n o von g nach m auf die d n, beschreibe über d n einen Halbkreis, errichte auf d n in m das Loth m o, ziehe es bis an die Peripherie, beschreibe aus n mit n v den Bogen o v, verbinde o mit m durch o m, errichte auf dieser Linie in ihrem Halbirungspunkte p und auf d o in deren Halbirungspunkte s, die Lothe p r und s r welche sich in r schneiden, ziehe o r und beschreibe aus r mit o r einen Kreis o m d, welcher die e f in o, den Kreis α in x berührt und durch d geht. Zieht man nun durch c von r die r t, so ist sie der Halbmesser des gesuchten Kreises γ, dessen Mittelpunkt r ist und der, wie

die Aufgabe verlangt, die ab in u berührt, von dem größern Kreise β aber außerhalb in w und von dem kleinern Kreise α innerhalb bei t berührt wird.

§. 399.

Aufgabe.

Eine gerade Linie ab (Fig. 392.) und zwei ungleiche Kreise um c und d sind gegeben, von denen der Kreis um d, die gegebene Linie ab in irgend einem Punkte e berührt; man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebene Linie in dem Berührungspunkte e und den gegebenen Kreis um c berührt.

Auflösung.

Man verbinde den Berührungspunkt e mit dem Mittelpunkte d, das heißt, man mache he lothrecht auf ab in e, ziehe cf # eh, verbinde f mit e durch ef, wodurch der Punkt g in der Peripherie um c erhalten wird. Zieht man nun durch c und g die ch und verlängert man diese Linie, bis davon das Loth ah in h getroffen wird, so ist h der Mittelpunkt und he oder hg sind die Halbmesser des verlangten Kreises, der die ab in e und den gegebenen Kreis berührt.

§. 400.

Aufgabe.

Es sind drei excentrische gleiche Kreise um a, b und c (Fig. 393.) gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der diese Kreise auswendig berührt.

Auflösung.

Den Mittelpunkt a verbinde man durch die ac mit dem Mittelpunkte c und eben so verbinde man b mit c. Jede dieser Linien halbire man in d und e und errichte auf denselben in diesen Halbirungspunkten die Lothe df und ef. Der Punkt f, in welchem sie sich schneiden, ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises. Wird nun af gezogen, so schneidet diese Linie die Peripherie des Kreises um a in g und es ist dann fg der Halbmesser desjenigen Kreises, welcher der Aufgabe genügt.

§. 401.

Aufgabe.

Wenn drei gleiche excentrische Kreise um a, b und c (Fig. 394.) gegeben sind, einen Kreis ghi zu beschreiben, welchem die gegebenen Kreise inwendig berühren.

Auflösung.

Man ziehe ab und bc, errichte in den Halbirungspunkten d und e dieser Linien, auf denselben Lothe, welche sich, wenn sie hinreichend verlängert werden, in f schneiden. Durch f und a ziehe man die fg, mit welcher man aus f den verlangten Kreis ghi beschreiben kann.

§. 402.

Aufgabe.

Drei Kreise sind gegeben, von denen zwei um a und b (Fig. 395.) einander gleich, aber kleiner als der dritte Kreis um c sind. Man soll einen Kreis stu beschreiben, welcher die gegebenen Kreise auswendig berührt.

Auflösung.

Die Mittelpunkte a und b der beiden gleichen Kreise verbinde man durch ab, beschreibe aus dem Mittelpunkte c des größeren Kreises einen Kreis, dessen Radius dem Unterschiede des größeren Radius von dem kleinern gleich ist. Man beschreibe daher mit cq = cr — av einen Kreis, lege daran von a die Tangente ad, mache ef = ab, fg = ad, eh = ad, ziehe fh und gi # fh, mache ak = ih, lege von k an den Kreis dglm die Tangente kl und verbinde den Berührungspunkt l mit a durch die Linie al, welche den Punkt m bestimmt. Nun halbire man am in o, halbire ferner ab in n, errichte auf den Linien am und ab in den eben gefundenen Halbirungspunkten Lothe, welche sich in p schneiden. Zieht man nun von p nach a die ap, so wird die Peripherie des gegebenen Kreises um a in s geschnitten und es ist dann ps der Halbmesser und p der Mittelpunkt des verlangten Kreises, welcher von dem gegebenen Kreise außerhalb in s, t und u berührt wird.

§. 403.

Aufgabe.

Es sind drei Kreise um a, b und c (Fig. 396.) gegeben, von denen zwei, nämlich die um a und c einander gleich sind, der dritte um b aber größer ist, als jeder von den gleichen Kreisen; man soll einen Kreis beschreiben, welchen die gegebenen Kreise inwendig berühren.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie ac der beiden gegebenen gleichen Kreise, beschreibe um b mit dem Radius br = bs — at einen Kreis, lege an denselben von c die Tangente cd, mache fh = ac, hi = cd, fk = cd, ziehe hk, mache il # hk, trage kl von c nach e, lege von e an den Kreis dgru eine Tangente eg und ziehe von c durch den Berührungspunkt g die cu. In den Halbirungspunkten der cu und der ac errichte man Lothe mo und no auf diesen Linien, welche sich in o schneiden. Zieht man nun durch c die oq, so ist sie der Halbmesser des aus o zu beschreibenden und verlangten Kreises, welcher die gegebenen Kreise in p, q und t berührt.

§. 404.

Aufgabe.

Man hat drei Kreise um a, b und c (Fig. 397.), von denen zwei einander gleich sind (nämlich der Kreis um a und der um b), der dritte um c aber kleiner ist, als die der andern beiden Kreise; es soll ein Kreis orpst beschrieben werden, der von den drei gegebenen Kreisen auswendig berührt wird.

Auflösung.

Um a und b beschreibe man mit einem Halbmesser au = av — cw Kreise, ferner beschreibe man um c mit dem Halbmesser au einen Kreis emn, ziehe die Centrallinie ab, lege von a die Tangente ae an den Kreis emn, mache fg = ab, gh = ae, fi = ae, ziehe gi, mache hk # gi, trage ik von a nach l, lege von l die Tangente lm an den Kreis emn, ziehe durch m von a die an, halbire sie in o, errichte in diesem Punkt

auf an ein Loth, halbire ab in p, errichte darin auf ab ebenfalls ein Loth, wodurch der Punkt q bestimmt wird. Zieht man nun aq, so wird die Peripherie des einen der größern Kreise in r geschnitten und qr ist der Halbmesser, q aber der Mittelpunkt des verlangten Kreises, welcher die gegebenen Kreise in r, s und t berührt.

§. 405.

Aufgabe.

Es sind drei Kreise um a, b und c (Fig. 398.) gegeben, von denen zwei, nämlich die um a und b einander gleich sind, der dritte Kreis um c aber ist kleiner, als jeder der andern Kreise; man soll einen Kreis qrs beschreiben, welchen die gegebenen Kreise inwendig berühren.

Auflösung.

Um c beschreibe man einen Kreis, dessen Halbmesser $cl = bu - ct$, ziehe die Centrallinie ab, mache $de = ab$, ge der von b an den Kreis fml gelegten Tangente bf gleich, ziehe eh und gi # eh, trage hi von b nach k, lege von k an den Kreis fml die Tangente kl, ziehe von b bis l die bl, errichte im Halbirungspunkte n der bm und im Halbirungspunkte o der ab auf den genannten Linien Lothe, wodurch der Punkt p erhalten wird, von welchem man durch b die pq zieht, welche der Halbmesser des verlangten aus p zu beschreibenden Kreises ist, der die gegebenen Kreise in q, r und s berührt.

§. 406.

Aufgabe.

Wenn drei ungleiche excentrische Kreise α, β und γ (Fig. 399.) gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, welchen die gegebenen Kreise auswendig berühren.

Auflösung.

Um b beschreibe man mit einem Halbmesser $ub = b\lambda - a\psi$ einen Kreis; um c beschreibe man mit $c\nu = c\pi - a\psi$ ebenfalls einen Kreis, ziehe den Halbmesser bu in beliebiger Richtung gegen den Mittelpunkt a; mache $o\nu$ # bu, ziehe durch u und ν eine gerade Linie, die bei hinreichender Verlängerung die verlängerte Centrallinie

b c in d schneidet; verbinde a mit d, mache e f = a d, f g = d μ, e h = d ϱ, ziehe f h, mache g i # f h, trage h i von d nach k auf der a d, ziehe von a eine Tangente a o an den Kreis um c, mache e l = a k, l m = a o, e n = a o, ziehe l n, mache m p # l n, trage n p von a nach q, lege von q eine Tangente q r an den Kreis um c und ziehe a r, so erhält man den Durchschnittspunt s. Wird nun k mit s durch die k s verbunden, auf dieser Linie in deren Halbirungspunkte ω ein Loth errichtet und dasselbe auf a k aus x vollzogen, so bekommt man den Durchschnittspunkt t. Zieht man nun von t die a d, so schneidet sie die Peripherie des Kreises α in y und es ist dann t y der Halbmesser, t aber der Mittelpunkt des verlangten Kreises, welcher die Kreise α, β und γ von außen berührt.

§. 407.

Aufgabe.

Es sind drei ungleiche Kreise α, β und γ (Fig. 400.) gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welchen die gegebenen Kreise inwendig berühren.

Auflösung.

Der Kreis γ ist der kleinste der gegebenen Kreise. Nun beschreibe man mit dem Halbmesser a d = a δ — c λ um a einen Kreis und mit b m = b μ — c λ um b einen Kreis, ziehe durch a und b die k o, lege den Halbmesser a d beliebig, jedoch nicht auf diejenige Seite des Kreises α, in welcher der gegebene Mittelpunkt c liegt, ziehe b m # a d, lege durch d und m eine gerade Linie, welche die Verlängerung der b k in o trifft und ziehe o c. An e g lege man e f = o c, f g = o h, e u = o k, ziehe f u, mache g t # f u, trage t u von o nach n, lege von c an den Kreis p r h m die Tangente c p, mache e γ = c n, γ y = c p, e t = c p, ziehe γ t, mache y u # γ t und trage t u von c nach q. Nun lege man von q an den Kreis h m p r die Tangente q r, ziehe durch c und r die c s, ziehe n s, errichte auf ihr in deren Halbirungspunkt ν ein Loth und eben so in dem Halbirungspunkte ω auf der c n; beide Perpendikel treffen sich in x. Wird nun durch c und x die x y gezogen, so ist diese der Halbmesser des gegebenen Kreises,

dessen Mittelpunkt x ist und welchen, wie die Aufgabe verlangt, die Kreise α, β und γ inwendig berühren.

§. 408.

Aufgabe.

Man hat drei ungleiche Kreise α, β und γ (Fig. 401.); es soll ein Kreis beschrieben werden, welchen zwei der gegebenen Kreise auswendig berühren, einer derselben aber inwendig berührt.

Auflösung.

Es ist der Kreis γ der kleinste. Nun beschreibe man um a mit $ak = a\psi + c\gamma$ und um b mit $bg = bi + c\gamma$ Kreise, ziehe durch a und b die ko, lege auf die Seite des kleinsten Kreises γ den Halbmesser ad in beliebiger Lage, mache $bl \# ad$, ziehe durch d und l eine gerade Linie, welche die Verlängerung der ab in o schneidet, ziehe co, mache $mo = co$, $os = oh$, $mu = ok$, ziehe ou, lege durch s die $ts \# uo$, trage tu von o nach n auf der γo, lege von c an den größeren Kreis um b die Tangente cg, mache $\nu\omega = cn$, $\omega x = cg$, $\nu y = cg$, ziehe ωy, mache $xz \# \omega y$, trage yz von c nach q auf der co, lege von q an den größeren Kreis um b die Tangente qr, ziehe cr, wodurch die Peripherie geh in e geschnitten wird. Jetzt ziehe man en, setze auf sie in ihren Halbirungspunkt δ ein Loth und auf cn setze man in deren Halbirungspunkt μ ebenfalls ein Loth. Dieses wird bei hinreichender Verlängerung jenes in λ treffen und es ist λ der Mittelpunkt des verlangten Kreises ϱ, welcher mit $\lambda\varphi$ beschreiben, von dem kleinsten Kreise γ inwendig, von den beiden größeren Kreisen α und β aber auswendig berührt wird.

§. 409.

Aufgabe.

Es sind drei ungleiche Kreise α, β und γ gegeben, man soll einen Kreis dergestalt beschreiben, daß er von den beiden größeren gegebenen Kreisen inwendig, von dem kleineren Kreise aber auswendig berührt wird.

Auflösung.

Um den Mittelpunkt a und b (Fig. 402.) der beiden größern Kreise beschreibe man zwei andere und zwar um a den einen Kreis mit dem Radius ak = aψ + cλ und um den Punkt b den andern Kreis mit bh = bφ + cλ; ferner ziehe man die Centrallinie ab, verlängere sie auf beiden Seiten, bis k und etwa bis o unbestimmt, ziehe den Halbmesser ad, auf der dem Kreise γ entgegengesetzten Seite des Kreises dk in willkürlicher Lage, mache bm # ad, lege durch d und m eine gerade Linie, welche die Verlängerung der ab in o trifft, ziehe co. mache cf = co, fg = ho, ei = ok, ziehe fi, mache gl # fi, trage il von o nach n auf die co, lege von c an den größern Kreis um b die Tangente cp, mache er = cn, rs = cp, ct = cp, ziehe rt, lege durch s die su # rt, mache cq = tu, lege von q an den größern Kreis um b die Tangente qr¹, ziehe durch c und r¹ bis an e die ce, ziehe en, halbire sie in ν, errichte auf derselben in ν ein Loth, halbire cn in ω, errichte in ω auf cn ebenfalls einen Perpendikel, wodurch der Punkt x erhalten wird, welches der Mittelpunkt des verlangten Kreises ist, den man mit dem Radius xy beschreibt. Es berührt dieser Kreis die gegebenen Kreise, wie die Aufgabe es verlangt.

§. 410.

In diese Abtheilung gehören noch die Aufgaben der Paragraphe 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 271, 274, 275, 276 und 295.

Dreizehnte Abtheilung.

Bestimmung des Schwerpunkts durch Konstruction.

a. Schwerpunkt der Linien.

§. 411.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer geraden Linie ab (Fig. 403.) zu finden.

Auflösung.

Man halbire die gegebene gerade Linie a b nach §. 6. in c; der Halbirungspunkt c ist der verlangte Schwerpunkt.

§. 412.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt zweier an einander liegenden geraden Linien ab und bc (Fig. 404.) zu bestimmen.

Auflösung.

Man halbire die ac in d; es ist dieser Punkt der verlangte Schwerpunkt.

§. 413.

Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien ab und cd (Fig. 405.) gegeben, welche nicht an einander, aber doch in gerader Linie liegen; man soll den beiden Linien gemeinschaftlichen Schwerpunkt o finden.

Auflösung.

Man halbire ab in e und cd in f, mache gh = ab + cd, hi = cd, gk = ef, ziehe hk, lege durch i die il # hk und trage kl von e nach o auf die ad; es ist dann o der verlangte Schwerpunkt.

§. 414.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Schenkel ab und ac (Fig. 406.) eines Winkels a oder den Schwerpunkt zweier geraden begrenzten einander berührenden, aber nicht in gerader Linie liegenden Linien zu finden.

Auflösung.

Man halbire ab in e und ac in f, ziehe ef; mache gh = ab + ac, hi = ab, gk = ef; ziehe hk und mache il # hk. Trägt man nun kl von f nach o auf die ef, so ist o der verlangte Schwerpunkt.

§. 415.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt mehrerer geraden Linien, die eine gebrochene Linie bilden, d. h. die nicht in geraden Linien liegen, zu finden.

Auflösung.

Es sind ab, ac und cd (Fig. 407.) die gegebenen geraden Linien. Man halbire die ab in e, die ac in f und die cd in g; mache lh = ab + ac, die lm = ab, ziehe ef, mache hi = ef, ziehe li und lege durch m die mk # li. Nun trage man die ik von f nach o auf der ef, ziehe og und mache np = ab + ac + cd, ferner pq = cd und nr = go, ziehe pr und mache qs # pr. Trägt man nun rs von o nach i, so ist i der verlangte Schwerpunkt.

§. 416.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Perimeters eines Dreiecks abc (Fig. 408.) zu finden.

Auflösung.

Jede der Dreiecksseiten halbire man in den Punkten d, e und f; verbinde diese Punkte durch die df, de und ef. Nun theile man zwei beliebige Winkel edf und efd durch die Linien dh und fg in die Hälfte und es ist dann der Durchschnitt i der beiden Halbirungslinien der verlangte Schwerpunkt.

§. 417.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Perimeters eines Rechtecks abcd (Fig. 409.) und eines Quadrats fghi zu finden.

Auflösung.

Sowohl in dem Rechteck als auch in dem Quadrate, ziehe man die Diagonalen ac und bd, fh und gi, welche sich bei jener Figur in e und bei dieser in k schneiden: es sind dann diese Durchschnittspunkte die gesuchten Schwerpunkte.

§. 418.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Perimeters einer jeden vierseitigen Figur zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey **abcd** (Fig. 410.) die gegebene vierseitige Figur. Man halbire die Seiten dieser Figur; nämlich **ab** in **e**, **bc** in **f**, **cd** in **g** und **ad** in **h**; verbinde diese Halbirungspunkte durch gerade Linien dergestalt, daß man ein neues Viereck **efgh** erhält. Nun halbire man jeden der Winkel des gegebenen Vierecks und zwar den Winkel **hae** durch **ai**, **ebf** durch **bk**, **fcg** durch **cl** und **gdh** durch **dm**; trage **hi** von **e** nach **n**, mache **eo** = **fk**, **gp** = **fl** und **gq** = **hm**. Verbindet man nun **o** mit **q** und **n** mit **p**, so schneiden sich diese Verbindungslinien in **r**, welches der verlangte Schwerpunkt ist.

§. 419.

Aufgabe.

Die Länge eines gegebenen Kreisbogens **abc** (Fig. 411.) ohngefähr durch eine gerade Linie darzustellen, oder den Kreisbogen **abc** ohngefähr zu rectificiren *).

Auflösung.

Man nehme den Radius **ad** desjenigen Kreises, von welchem der Kreisbogen **abc** ein Theil ist, doppelt: man erhält dadurch den Durchmesser des gedachten Kreises. Diesen Kreis rectificire man nach §. 189, messe den Winkel **adc**, untersuche der wie vielste Theil er von (360°) vier Rechten ist und nehme von der geraden Linie, welche der Peripherie ohngefähr gleich gemacht worden ist, einen solchen Theil, der so viel mal in der geraden Linie enthalten ist, als der Winkel **acd** in 360°; diese Länge ist dann der Länge des gegebenen Kreisbogens ziemlich gleich.

§. 420.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kreisbogens **abc** (Fig. 411.) zu finden.

*) Diese Aufgabe gehört eigentlich in die vierte Abtheilung.

Auflösung.

Man ziehe die Sehne **ac**, bestimme den Mittelpunkt **d** des Kreisbogens, fälle von **d** auf **ac** den Perpendikel **dh**, verlängere ihn bis an den Bogen **abc**, rectificire den Bogen **abc** nach §. 419, mache **ef** = Bogen **abc**, **fg** = **ac** und **ke** = **bd**. Zieht man nun **fk** und **gl** ∥ **fk**, so ist, wenn **kl** von **d** nach **i** auf **bd** getragen wird, **i** der gesuchte Schwerpunkt.

§. 421.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Perimeters eines Polygons **abcde** (Fig. 412.) zu finden.

Auflösung.

Man halbire alle Seiten des Polygons, nämlich **ab** in **f**, **ae** in **g**, **de** in **h**, **cd** in **l** und **bc** in **n**; ziehe **fg** und bestimme nach §. 414 den Schwerpunkt **i** und nach §. 415 bestimme man den Schwerpunkt **k**, ziehe **kl** und suche auf dieselbe Art, wie zuvor, den Punkt **m**. Zieht man nun **mn** und operirt man wieder wie zuvor, so ist **o** der verlangte Schwerpunkt des Polygons **abcde**.

§. 422.

Im Fall die Polygone regulär sind, so ist deren Mittelpunkt der gesuchte Schwerpunkt, welchen man also nur zu suchen hat.

§. 423.

Aufgabe.

Es ist ein Kreisbogen **aeb** (Fig. 413.) und dessen Schwerpunkt **g** gegeben; man soll den Schwerpunkt eines doppelt so großen Bogens **aebfc** finden.

Auflösung.

Man suche den Mittelpunkt **d**, der zum Kreisbogen gehört, ziehe die Halbmesser **de**, **ad** und **bd**, mache den Bogen **bfc** = Bogen **aeb** und **bf** = **be**, ziehe die Radien **df** und **cd**, mache **fh** = **eg**, ziehe **gh** und halbire **gh** in **i**, welches der Schwerpunkt des doppelten Bogens **aebfc** von **aeb** ist.

§. 424.

Aufgabe.

Es ist ein Kreisbogen und sein Schwerpunkt gegeben; man soll daraus den Schwerpunkt der Hälfte dieses Bogens finden.

Auflösung.

Es sey **abc** (Fig. 440.) der gegebene Bogen und **e** dessen Schwerpunkt. Man suche den Mittelpunkt **d** dieses Bogens, halbire den Bogen **abc** in **b**, ziehe durch den Schwerpunkt und durch das Centrum eine gerade Linie **bd**, welche in den Halbirungspunkt **b** fallen wird, halbire den Bogen **ab** in **f**, ziehe **df** und errichte auf **bd** in **e** einen Perpendikel **ge**, welcher den Halbmesser **df** in **g** schneidet und dadurch den Schwerpunkt **g** des Bogens **afb** bestimmt.

§. 425.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kreisbogens **abc** (Fig. 414.), der von seiner Sehne eingeschlossen ist, zu finden.

Auflösung.

Nach §. 420 bestimme man zu dem Kreisbogen **abc** den Schwerpunkt **g**, halbire die Sehne **ac** in **e**, ziehe durch **g**, oder was einerlei ist, durch den Halbirungspunkt **b** des Bogens den Halbmesser **bd**, ziehe die Sehne **bc**, halbire sie in **f** und ziehe **df**. Nun mache man $ik = df + dg$, $kl = df$, $im = eg$, ziehe **mk**, lege durch **l** die **ln** # **mk** und trage **mn** von **e** nach **h**, so ist **h** der verlangte Schwerpunkt.

§. 426.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Peripherie eines Halbkreises **abc** (Fig. 415.), der von seinem Durchmesser **ac** eingeschossen ist, zu bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 420 wird für die halbe Peripherie **abc** der Schwerpunkt **i** bestimmt, aus dem Mittelpunkte **d** auf dem Durchmesser **ac** der Halbmesser **bd** lothrecht gezogen, $ef = bd + di$, $fg = di$, $eh = bd$ gemacht, **fh**

gezogen und g k # f h gelegt. Trägt man nun h k von d nach l in die b d, so erhält man den Punkt l, welcher der gemeinschaftliche Schwerpunkt für den von seinem Durchmesser a c eingeschlossenen Halbkreis a b c ist.

§. 427.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Peripherie eines Kreises zu finden.

Auflösung.

Man bestimme zu der gegebenen Peripherie den Mittelpunkt: er ist der Schwerpunkt dieser Peripherie.

b. Schwerpunkt der ebenen Flächen.

§. 428.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Quadrat-, Rechtecks- und Parallelogrammfläche zu finden.

Auflösung.

Sowohl beim Quadrate f g h i (Fig. 409.), als auch beim Rechteck a b c d, wird der Schwerpunkt durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen bestimmt und es ist daher e der Schwerpunkt des Rechtecks a b c d und k ist der Schwerpunkt des Quadrats f g h i. Ganz auf dieselbe Art findet man diesen Punkt beim Parallelogramm. Man ziehe dessen Diagonalen a c und b d (Fig. 416.), ihr Durchschnitt e ist der verlangte Schwerpunkt.

§. 429.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt jeder Dreiecksfläche zu finden.

Erste Auflösung.

Wenn a b c (Fig. 417.) das gegebene Dreieck ist, es mag gleichseitig, oder ungleichseitig, recht-, spitz-, oder stumpfwinklig seyn, so halbire man zwei seiner Seiten a b in e und b c in d, ziehe die Halbirungspunkte mit den ihnen gegenüberstehenden Spitzen c und a durch die Linien c e und a d zusammen, wodurch der Schnittpunkt f sich ergibt, welcher der gesuchte Schwerpunkt ist.

Andere Auflösung.

Man halbire eine der Dreiecksseiten, etwa **b c**, verbinde deren Halbirungspunkt **d** mit **a** durch die **a d** und theile diese Linie in drei gleiche Theile. Der erste Theilpunkt **f**, von **d** an, ist der verlangte Schwerpunkt.

§. 430.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Parallelotrapezes **a b c d** (Fig. 418.) zu finden.

Erste Auflösung.

Man halbire jede der parallelen Seiten **a b** und **c d**, verbinde deren Halbirungspunkte **e** und **f** durch **e f**, theile jede der nicht parallelen Seiten **a d** und **b c** in drei gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte **g** und **h**, **i** und **k** durch die Linien **g h** und **i k**, ziehe **a f** und **c e**, wodurch die **i k** in **l** und die **g h** in **m** geschnitten wird. Verbindet man nun die Punkte **l** und **m** durch die **l m**, so schneidet sie die **e f** in **o**, welches der gesuchte Schwerpunkt ist.

Andere Auflösung.

Jede der parallelen Seiten theile man in die Hälfte, nämlich **a b** (Fig. 420.) bei **m** und **c d** bei **n**, ziehe durch **m** und **n** eine gerade Linie, verlängere **c d**, bis **c f** = **2 b m** wird, ziehe **b f** und verlängere sie so weit, bis dadurch die Verlängerung der **m n** in **g** getroffen wird. Theilt man nun **g n** bei **s** in die drei gleichen Theile, so ist **s** der Schwerpunkt des Paralleltrapezes.

§. 431.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Trapezes **a b c d** (Fig. 419.) zu bestimmen.

Erste Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen **b d** und **a c**, bestimme den Schwerpunkt **f** des Dreiecks **a b d**, indem man (§. 429) **a d** in **e** halbirt, **b e** zieht und **e f** = $\frac{1}{3}$ **b e** macht. Ferner bestimme man den Schwerpunkt **h** des Dreiecks **b c d**, indem man aus **g**, das ist aus $\frac{1}{2}$ **c d** die **b d** zieht und **g h** = $\frac{1}{3}$ **b g** macht. Nun bestimme man auch für das Dreieck **a b c** den Schwerpunkt **l**, welcher im ersten Drit-

tel der **k a** liegt und eben so suche man den Schwerpunkt **i** des Dreiecks **a c d**, welcher in **a g** liegt, die von dem Halbirungspunkte **g** der **c d** nach **a** gezogen ist. Verbindet man endlich die Punkte **f** und **h**, ferner die Punkte **i** und **l** durch gerade Linien, so schneiden sich diese in **m**, welches der Schwerpunkt des Trapezes **a b c d** ist.

Andere Auflösung.

Man ziehe die Diagonalen **a c** und **b d** (Fig. 421.), halbire **a c** in **f** und **b d** in **g**, mache **f h** # **b d** und **h g** # **a c**, ziehe **h e** und mache **h o** $= \frac{1}{3}$ **h e**.

§. 432.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Vierecks **a b c d** (Fig. 422.), welches einen eingehenden Winkel **a d c** hat, zu finden.

Auflösung.

Man ziehe **a c**, lege durch **b** und **d** die **b e**, halbire **a c** in **m** und die durch **b** und **d** gezogene **b e** in **n**, mache **p m** # **b e**, **p n** # **a c** und ziehe **p e**. Wird nun **p o** $= \frac{\mathbf{pe}}{3}$ gemacht, so ist **o** der Schwerpunkt des Vierecks **a b c d**.

§. 433.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines jeden regulären Polygons zu finden.

Auflösung.

Der Schwerpunkt eines jeden regulären Vielecks ist dessen Centrum und man hat daher dieses nach den bekannten Methoden zu bestimmen.

§. 434.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines irregulären Fünfecks **a b c d e** (Fig. 423.) zu finden.

Auflösung.

Aus irgend einem Figurenwinkel **d** zerlege man das Fünfeck in Dreiecke **a d e**, **a b d** und **b c d**. Nun suche man

nach §. 429 den Schwerpunkt **i** des Dreiecks **a d e**, dann nach §. 431 oder §. 432 den Schwerpunkt **g** des Vierecks **a b d e** und ziehe **i g**. Ferner bestimme man, wie zuvor, den Schwerpunkt **h** für das Dreieck **b c d** und dann den Schwerpunkt **f** für das Viereck **a b c d**. Zieht man nun **f h**, so wird dadurch die **g i** im Punkte **o** geschnitten, welcher der gesuchte Schwerpunkt des Fünfecks **a b c d e** ist.

§. 435.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines jeden irregulären Vielecks zu bestimmen.

Auflösung.

Man zerlege das Vieleck zweimal in zwei Theile, suche zu jedem Theile den Schwerpunkt, verbinde den Schwerpunkt des einen Theils mit dem des andern durch eine gerade Linie, mache dasselbe mit den andern beiden Theilen und man erhält durch dieses Verfahren in dem Durchschnittspunkte der beiden Verbindungslinien den gesuchten Schwerpunkt.

§. 436.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Kreisfläche zu finden.

Auflösung.

Man suche den Mittelpunkt der Kreisfläche: er ist der gesuchte Schwerpunkt.

§. 437.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen.

Auflösung.

Man setze den Halbmesser **c d** (Fig. 424.) lothrecht auf den Durchmesser in den Halbkreis, mache $\mathbf{a e} = \frac{1}{3}\,\mathbf{a d}$, suche nach §. 419 die Länge des Bogens **a c**, trage sie von **g** nach **h**, mache $\mathbf{h i} = \mathbf{a d}$, $\mathbf{g k} = \mathbf{d e}$, ziehe **h k**, lege durch **i** die **i l** # **h k** und trage **k l** von **d** nach **f** auf die **c d**; der Punkt **f** ist der verlangte Schwerpunkt.

§. 438.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kreisausschnitts **abcd** (Fig. 425.) zu finden.

Auflösung.

Man ziehe **ac**, fälle vom Mittelpunkte **d** auf **ac** den Perpendikel **bd**, suche nach §. 419 die Länge des Bogens **abc**, lege an **cg** die **ci** in beliebiger Lage, mache **ch** = $\frac{1}{2}$ Bogen **abc**, trage **ce** von **h** nach **i**, halbire **cd** in **f**, ziehe **fh** und lege **gi** # **fh**. Trägt man nun die **fg** zweimal von **d** nach **n** auf die **bd** und macht man **no** = $\frac{1}{3}$ **dn**, so ist **o** der Schwerpunkt des Kreisausschnitts.

§. 439.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kreisabschnitts **abc** (Fig. 426.) zu finden.

Erste Auflösung.

Man bestimme nach §. 27 den Mittelpunkt **d** zu dem Bogen **abc**, ziehe **cd** und fälle von **d** auf **ac** das Loth **bd**. Nun suche man nach §. 419 die Länge des Bogens **abc**, trage deren Hälfte von **c** nach **h**, wenn zuvor **ci** an **cd** unter einem beliebigen Winkel gelegt wurde, mache **hi** = **ce**, halbire **cd** in **f**, ziehe **fh** und mache **gi** # **fh**. Jetzt trage man **fg** zweimal von **d** nach **k**, mache **kl** = $\frac{1}{3}$ **dk** und **em** = $\frac{1}{3}$ **cd**. Nachdem dies geschehen, berechne man den Flächeninhalt des Segments **abc** und den des Dreiecks **acd** *), um folgende Proportion bilden zu können:

es verhält sich der Inhalt des Segments **abc**
zum Inhalte des Dreiecks **acd** wie **lm** : **ln**.

Hat man nun hieraus die **ln** entwickelt und trägt man sie von **l** nach **n**, so ist **n** der gesuchte Schwerpunkt.

Zweite Auflösung.

Man halbire die Sehne **ac** in **l**, errichte auf **ac** in **l** das Loth **bl**, suche nach §. 27 den Mittelpunkt **d**, wel-

*) Arithmetisches Handbuch ꝛc. von J. C. G. Hampel. Breslau 1833, bei C. Pelz. §. 204 und §. 97.

cher zum Bogen **abc** gehört, berechne den Flächeninhalt **F** des gegebenen Kreisabschnitts **abc** und es ist dann:

$$dn = \frac{2ce^3}{3F}$$

§. 440.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Mondstücks **abckao** (Fig. 427.) zu finden.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie **hi**, verlängere sie bis **a** und **c**, mache **ak = ao**, fälle von **k** auf **ac** das Loth **kl**, mache die Sehne **ce = hi**, ziehe **ae** und lege durch **l** die **lg # ae**. Trägt man nun **cg** von **h** nach **f** in die **ac**, so ist **f** der verlangte Schwerpunkt.

§. 441.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Parabel zu bestimmen.

Auflösung.

Die Doppelordinate **ac** (Fig. 428.) halbire man in **d**, errichte in diesem Punkte auf **ac** den Perpendikel **bd**, theile ihn in fünf gleiche Theile und mache **de** auf **bd** zwei solchen Theilen gleich: es ist dann **e** der verlangte Schwerpunkt.

§. 442.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer abgekürzten Parabel **afgc** (Fig. 429.) zu finden.

Auflösung.

Man setze die Ordinate **hg = a**, die **ac = A** und **bd = h**. Entwickle aus

$$bh = \frac{a^2 h}{(A + h)\,(A - h)}$$

durch Rechnung, oder auch durch Konstruction die **bh** und zeichne nach §. 160 (andere Auflösung) die Parabel zu der gegebenen Breite **fg** und der gefundenen Höhe **bh**, wodurch das abgeschnittene Stück **acgf** ergänzt wird. Nun bestimme man nach §. 441 den Schwerpunkt **v** zu der

Parabel fbg, indem man hv = $\frac{2}{5}$bh macht und ebenfalls bestimme man zur ganzen Parabel afbgc nach §. 441. den Schwerpunkt e, indem man de = $\frac{2}{5}$bd macht. Wenn dies geschehen, so bilde man folgende Proportion:

$$(ad^3 - fh^3) : fh^3 = ve : ex$$

hat man hieraus ex bestimmt und auf die bd von e nach x getragen, so ist x der verlangte Schwerpunkt der abgeschnittenen Parabel.

§. 443.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Ellipse zu finden.

Auflösung.

Man bestimme den Mittelpunkt der Ellipse nach §. 148., er ist der verlangte Schwerpunkt.

§. 444.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer halben Ellipse abd (Fig. 430.) zu finden.

Auflösung.

Mit der halben großen Achse cd der Ellipse beschreibe man aus c den Halbkreis edf und bestimme nach §. 437. dessen Schwerpunkt g, welcher auch der Schwerpunkt der halben Ellipse ist.

§. 445.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines elliptischen Abschnitts abc (Fig. 431.), dessen Achse in der großen Achse der Ellipse liegt, zu finden.

Auflösung.

Man verlängere die Doppelordinate ac auf beiden Seiten, beschreibe aus dem Mittelpunkte d der Ellipse mit der halben Achse bd den Bogen ebf und bestimme nach §. 439. den Schwerpunkt des Kreisabschnitts ebf: er ist der gesuchte Schwerpunkt des elliptischen Abschnitts.

§. 446.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines elliptischen Abschnitts abc (Fig. 432.), dessen Achse in der kleinern Achse der Ellipse liegt, zu bestimmen.

Auflösung.

Man halbire **a c** in **d**, beschreibe aus diesem Punkte mit der halben kleinen Achse **b d** den Halbkreis **e b f** und bestimme nach §. 437. dessen Schwerpunkt **g**: es ist dieser Punkt der Schwerpunkt des elliptischen Abschnitts **a b c**.

§. 447.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer gleichseitigen Hyperbel **e d f** (Fig. 433.) zu bestimmen.

Auflösung.

Durch den Mittelpunkt **c** fälle man auf **e f** den Perpendikel **e g** und berechne den Flächeninhalt **e d f = F**; setze hierauf in die Formel

$$\mathbf{sc} = \frac{2 \cdot \mathbf{ge}^3}{3\ \mathbf{F}}$$

den Werth für **g e** und trage die durch diese Formel gefundene Länge **s c** von **c** nach **s** auf die **c g**; es ist dann **s** der verlangte Schwerpunkt.

c. Schwerpunkt der Körper.

§. 448.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Würfels, eines Parallelepipeds und eines Prismas zu finden.

Auflösung.

Beim Würfel findet man den Schwerpunkt, wenn man durch die Mittelpunkte zweier einander gegenüberliegender Seitenflächen eine gerade Linie zieht und diese halbirt: der Halbirungspunkt ist der verlangte Schwerpunkt.

Bei dem Parallelepipedum verfährt man eben so: man bestimmt nämlich die Mittelpunkte oder vielmehr die Schwerpunkte zweier einander gegenüberliegender Seiten-

flächen und verbindet sie durch eine gerade Linie, in deren Mitte der gesuchte Schwerpunkt liegt.

Aehnlich verfährt man bei dem Prisma: man sucht die Schwerpuncte der Grundflächen und verbindet sie durch eine gerade Linie, in deren Mitte der Schwerpunkt des Prismas sich befindet.

§. 449.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Pyramide **abcd** (Fig. 434.) zu finden.

Auflösung.

Man suche den Schwerpunkt **e** der Grundfläche **abc**, nach den Aufgaben, welche von §. 428 bis 435 **incl.** vorkommen, weil die Grundfläche ein Drei-, Vier- oder auch wohl ein Vieleck seyn kann, verbinde ihn mit dem Gipfel **d** durch die **de** und theile diese Linie in vier gleiche Theile. Trägt man nun ein solches Viertel von **e** bis **f**, so ist **f** der Schwerpunkt der Pyramide.

§. 450.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Cylinders zu bestimmen.

Auflösung.

Man verbinde die Mittelpunkte der Grundflächen des Cylinders durch eine gerade Linie, in deren Halbirungspunkt der verlangte Schwerpunkt des Cylinders liegt.

§. 451.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kegels zu finden.

Auflösung.

Den Schwerpunkt **b** (Fig. 435.) der Grundfläche des Kegels verbinde man mit dessen Spitze durch eine gerade Linie **ab**, theile sie in vier gleiche Theile und nehme für **bc** einen solchen Theil; es ist sodann **c** der Schwerpunkt des Kegels.

§. 452.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Kugel und eines Sphäroids zu bestimmen.

Auflösung.

Die Mittelpunkte dieser Körper sind deren Schwerpunkte.

§. 453.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Halbkugel zu ermitteln.

Auflösung.

Auf der Grundfläche der Halbkugel und zwar in deren Mittelpunkte **a** (Fig. 436.), errichte man das Loth **ab**, theile es in acht gleiche Theile und gebe dem der Grundfläche am nächsten liegenden Segment **ac** drei solcher Theile; wodurch der Schwerpunkt **c** gefunden ist.

§. 454.

Aufgabe.

Eines Kugelabschnitts Schwerpunkt zu finden.

Auflösung.

Im Mittelpunkt **a** (Fig. 437.) der Grundfläche, wird auf derselben die Normale **ab** errichtet und in acht gleiche Theile getheilt. Nimmt man nun drei solcher Theile und trägt man sie auf die **ab** von **a** bis **c**, so ist **c** der gesuchte Schwerpunkt.

§. 455.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Kugelausschnitts **abcde** (Fig. 438.) zu bestimmen.

Auflösung.

Man ziehe vom Kugelcentrum **e** die Achse **be** bis an die Kugelfläche, mache $df = \frac{1}{4}de$ und $dg = \frac{3}{8}bd$. Nun suche man zum Kubikinhalte des Kugelausschnitts **abce**, zum Kubikinhalte des Kegels **ace** und zu **fg** die vierte Proportionale **gh**, wodurch der verlangte Schwerpunkt **h** erhalten ist.

§. 456.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Sphäroiden Segments zu ermitteln.

Auflösung.

Man setze die Achse **a b** (Fig. 437.) lothrecht auf die Grundfläche und zwar in deren Mittelpunkt **a**, theile sie in acht gleiche Theile und gebe der **a c** drei solcher Theile: **c** ist dann der Schwerpunkt des Sphäroidenabschnitts.

§. 457.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Paraboloids zu finden.

Auflösung.

Auf dem Durchmesser **a c** (Fig. 439.) der Grundfläche des Paraboloids und zwar in dessen Mittelpunkte **d**, errichte man ein Loth **b d**, welches bis an die Parabel geht, ziehe **a b** und **b c** und suche den Schwerpunkt **e** des Dreiecks **a b c** nach §. 429., indem man $d e = \frac{1}{3} b d$ macht; **e** ist dann der Schwerpunkt des gegebenen Paraboloids.

Vierzehnte Abtheilung.

Zeichnung der platonischen Körper.

§. 458.

Aufgabe.

Ein Tetraëder zu zeichnen.

Auflösung.

Man beschreibe einen Kreis, theile ihn bei **a**, **b** und **c** (Fig. 441.) in drei gleiche Theile, ziehe die Sehnen **a b**, **b c** und **a c** und verbinde jeden der Theilpunkte **a**, **b** und **c** mit dem Mittelpunkte **g** durch die Linien **a g**, **b g** und **c g**, wodurch die geometrische Zeichnung des Tetraëders beendet ist.

§. 459.

Aufgabe.

Einen Würfel, Kubus oder Heraëder zu zeichnen.

Auflösung.

Die Peripherie eines mit irgend einem Halbmesser **b g** (Fig. 442.) beschriebenen Kreises theile man bei **a**,

b, c, d, e und f in sechs gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte durch Sehnen und ziehe die Halbmesser a g, c g und e g; wodurch die Zeichnung beendet ist.

§. 460.

Aufgabe.

Ein Oktaëder zu zeichnen.

Auflösung.

Man theile den Kreis bei a, b, c und d (Fig. 443.) in vier gleiche Theile, ziehe die Durchmesser a c und b d, so wie Sehnen a b, b c, c d und a d: die hierdurch entstandene Figur ist die verlangte.

§. 461.

Aufgabe.

Ein Dodekaëder zu zeichnen.

Auflösung.

Die Peripherie eines gegebenen Kreises theile man in zehn gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte durch Sehnen mit einander, so daß ein reguläres Zehneck entsteht. Nun ziehe man (Fig. 444.) die Durchmesser a f, b g, c h, d i und e k, ziehe e g, g i, i a, a c und c e (indem man immer einen Theilpunkt des Zehnecks wegläßt, folglich ein Fünfeck a c e g i in das Zehneck legt), wodurch die gezogenen Durchmesser in l, m, n, o und p geschnitten werden. Diese Durchschnittspunkte verbinde man durch gerade Linien l m, m n, n o, o p und p l wodurch die Punkte q, r, s, t und u erhalten werden. Verbindet man nun diese Punkte durch die Linien q r, r s, s t, t u und u q, so ist die Zeichnung des Dodekaëders beendet.

§. 462.

Aufgabe.

Ein Ikosaëder zu zeichnen.

Auflösung.

In die Peripherie eines gegebenen Kreises wird ein reguläres Sechseck gezeichnet und von jedem Figurenwinkel a, b, c, d, e und f (Fig. 445.) wird eine gerade Linie nach dem Centrum g gelegt. Jetzt verbinde man den ersten und dritten Theilpunkt, dann den dritten und

fünften und endlich den fünften und ersten, nämlich a und c, c und e, e und a durch Sehnen, wodurch in das Sechseck ein gleichseitiges Dreieck ace konstruirt wird. Jede dieser Dreiecksseiten schneidet einen Halbmesser (so wie z. B. die ec, den Halbmesser dg in h schneidet) und bestimmt die Entfernungen gh, gm und gn. Diese Entfernungen von g theile man in fünf gleiche Theile, trage einen solchen Theil von h nach i und beschreibe aus g mit gi einen Kreis, welcher die Punkte k und l in den Halbmessern fg und bg angibt. Zieht man nun ei, ic, cl, la, ak, ke, ik, il und kl, so ist das Ikosaëder gezeichnet.

§. 463.

Es wurde hier nur das Zeichnen der fünf platonischen Körper gezeigt, da das geometrische Aufzeichnen der übrigen mathematischen Körper theils keine Schwierigkeit macht, theils auch nicht in dieses Buch, sondern zur Perspective gehört, wo dem Anfänger Parallelepipeden, Cylinder, Halbkugeln, Pyramiden, Prismen, Kegel, abgestutzte Pyramiden, abgestutzte Kegel u. d. g. m. gegeben werden; um solche in Perspective zu bringen.

Funfzehnte Abtheilung.

Konstruktion architektonischer Glieder.

§. 464.

Die Glieder, deren Konstructionen hier gezeigt werden, bilden bekanntlich bei gehöriger Verbindung mit einander Simse, Säulen und Theile derselben. Das Zusammensetzen dieser Glieder gehört nicht in dieses Werk, weil hier nur gleichsam die Hilfsmittel zur Bildung gewisser räumlicher Gegenstände, nicht aber diese Gegenstände selbst oder deren Zusammenstellung an die Hand gegeben werden sollen. Die Anleitung, Simse und Säulen zu zeichnen, kann daher unter allen Umständen hier keinen Platz finden.

§. 465.

Aufgabe.

Einen Rundstab zu zeichnen.

Auflösung.

Man halbire die Höhe **ab** (Fig. 446.) des Rundstabs und beschreibe aus deren Halbirungspunkte **c** mit **ac** einen Halbkreis.

§. 466.

Aufgabe.

Einen Viertelstab zu konstruiren.

Auflösung.

Die Höhe **ab** (Fig. 447.) wird von **a** nach **c** getragen und aus **a** mit **ab** der Bogen **bc** beschrieben.

§. 467.

Aufgabe.

Einen Anlauf, Ablauf oder Anschwung zu zeichnen.

Auflösung.

Die Höhe **ab** (Fig. 448.) wird von **a** nach **c** getragen, **eb** verlängert, **bd** = **ab** gemacht oder **cd** lothrecht in **c** auf **ac** gezogen und aus **d** mit **bd** die Bogen **bc** beschrieben.

§. 468.

Aufgabe.

Eine doppelte Einziehung zu zeichnen.

Erste Auflösung.

Man theile die Höhe **ab** (Fig. 449.) in drei gleiche Theile, ziehe durch den ersten Theil **d**, die **ef** # **bc**, mache **bc** = **ad** und errichte auf **bc** in **c** das Loth **ce**. Beschreibt man nun aus **d** mit **ad** den Bogen **af** und aus **e** mit **ef** den Bogen **cf**, so ist die Einziehung **afc** beendet.

Andre Auflösung.

Die Höhe **ab** (Fig. 450.) theile man in sechs gleiche Theile und ziehe durch den ersten Theil **d** die **de** # **af** und errichte in **f** auf **af** = $\frac{4}{6}$**ab** ein Loth **cf**. Wird nun aus **d** mit **bd** der Bogen **be** und aus **c** mit **ce** der Bogen **ef** beschrieben, so ist die doppelte Einziehung konstruirt.

Dritte Auflösung.

Die Höhe **ab** (Fig. 451.) wird in vier gleiche Theile getheilt, durch den ersten Theilpunkt **c** lege man **ed** # **bf**,

errichte in f auf der bf = ½ab ein Loth ef und beschreibe aus c mit ac den Bogen ad, und aus e mit de den Bogen df, wodurch die doppelte Einziehung gebildet ist.

Vierte Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 452.) wird von a nach c und von b nach d getragen, cd gezogen, ab in e, cd in i, ac in g und ie in f halbirt und f mit g verbunden, endlich aus f mit fg der Bogen eg beschrieben. Jetzt schlage man aus e mit ie den Bogen hl und aus d mit demselben Halbmesser den Bogen hel, wodurch die Punkte h und l erhalten werden, durch welche man die hl zieht und dadurch den Punkt k in der ie erhält. Beschreibt man nun aus k mit ek einen Bogen ed, so ist ged die verlangte Einziehung.

§. 469.

Aufgabe.

Einen halben Herzstab zu konstruiren.

Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 453.) wird in drei gleiche Theile getheilt, durch den ersten Theil die ef # ac gelegt, ac = ae gemacht, cd in c auf ac normal gestellt, aus d mit cd ein Bogen cf und aus e mit ef der Bogen bf beschrieben, wodurch bfc die verlangte krumme Linie ist, welche den halben Herzstab bildet.

§. 470.

Aufgabe.

Einen Hängestab zu zeichnen.

Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 454.) wird in c halbirt, bf verlängert, aus b mit bc der Bogen cd und mit ab der Bogen ae beschrieben. Schlägt man nun aus d mit bd einen Halbkreis, so ist aeb der verlangte Hängestab.

§. 471.

Aufgabe.

Einen Rinnleisten zu konstruiren.

Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 455) wird von a nach d und von b nach c getragen, cd gezogen, ab in g, bc in i, cd in f, ad in e halbirt, fg und ei gezogen, aus f aber der Bogen dh mit df und aus g mit derselben Zirkelöffnung der Bogen bh beschrieben, wodurch der Rinnleisten bhd gebildet ist.

§. 472.

Aufgabe.

Einen Kehlleisten zu zeichnen.

Auflösung.

Es wird, wie §. 471., ab = ab, bc = ab (Fig. 456.) gemacht, cd gezogen, ab in g, bc in i, cd in f, ad in e halbirt und fg und ei gezogen. Beschreibt man nun aus e mit de und mit derselben Zirkelöffnung aus i die Bogen dh und bh, so ist die Konstruction beendet.

§. 473.

Der Viertelstab, der Anschwung die doppelte Einziehung, der Rinnleisten und der Kehlleisten, treten so weit hervor, als sie hoch sind und dies Hervortreten heißt man Quadratvorsprung oder Quadratausladung. Springt aber ein Glied nicht so viel hervor, als es hoch ist, so wird es ein verkürztes Glied und die Ausladung eine verkürzte genannt. Glieder, welche mehr vorspringen, als sie hoch sind, haben verlängerte Ausladungen. Bei allen Gliedern wird die Ausladung nach dem Verhältniß bestimmt, in welchem der Vorsprung zur Höhe steht. Hat z. B. die Höhe drei Theile, der Vorsprung deren aber nur zwei, so ist dies eine Ausladung von dem Verhältniß wie 2 : 3; und so hat man Ausladungen die sich wie 3 : 4, wie 4 : 5 u. s. w. verhalten. Zu den Verhältnissen der Gliederhöhen und deren Ausladungen wählt man allemal solche Zahlen, deren Einheitenmenge nicht sehr von einander verschieden ist und die durch kleine Zahlen dargestellt werden können, weil die Erfahrung es gelehrt hat, daß die einfachsten Verhältnisse bei den architektonischen Gliedern die schönsten sind.

§. 474.

Aufgabe.

Einen verkürzten Viertelstab, der sich wie 2 : 3 verhält, zu zeichnen.

Erste Auflösung.

Die Höhe **a b** (Fig. 457.) theile man in drei gleiche Theile, setze zwei derselben von **a** nach **c**, ziehe **b c** und beschreibe damit sowohl aus **b**, als auch aus **c** zwei Bogen, welche sich in **d** schneiden. Mit unveränderter Zirkelöffnung wird aus **d** der Bogen **b c** beschrieben, welcher den verlangten Viertelstab bildet, der sich, wie die Aufgabe verlangt, wie 2 : 3 verhält.

Andre Auflösung.

Man verfahre anfänglich ganz wie bei den ersten Auflösung, nur dann mit dem Unterschiede, daß man die aus **f** nach **g** (Fig. 457.) beschriebenen Bogen sich in zwei Punkten **h** und **o** schneiden läßt und diese Punkte durch eine gerade Linie **o h** verbindet, wodurch auf der verlängerten **g e** der Punkt **i** erhalten wird, aus welchem man mit **g i** den verkürzten Bogen **f g** beschreibt, wodurch der Viertelstab, welcher sich wie 2 : 3 verhält, konstruirt ist.

§. 475.

Aufgabe.

Einen Viertelstab zu konstruiren, dessen Ausladung größer als die Höhe des Viertelstabes ist und wobei bestimmt ist, daß sich dieser Vorsprung zur Höhe wie 4:3 verhalten soll.

Auflösung.

Die Höhe **k l** (Fig. 458.) theile man in drei gleiche Theile und setze 4 derselben von **k** nach **m**, ziehe **l m**, beschreibe damit sowohl aus **l** als auch aus **m** die Bogen **m n** und **l n**, welche sich in **n** schneiden und woraus mit **m n** der Bogen **l m** geschlagen wird, welcher den verlangten Viertelstab bildet. Man kann indeß auch die aus **l** und **m** beschriebenen Bogen so weit ziehen, daß sie sich nicht nur in **n**, sondern auch in **p** schneiden. Ist dies geschehen, so verbinde man durch die **n p** die beiden Durchschnittspunkte **n** und **p**, wodurch die **m k** in **q** geschnitten wird. Beschreibt man nun aus **q** mit **m q** einen Bogen

mrl, so entspricht auch dieser der Aufgabe; er ist indeß mehr herabhängend als jener Bogen msl.

§. 476.

Aufgabe.

Einen Anlauf zu konstruiren, dessen Auslaadung sich zur Höhe wie 2 : 3 oder auch 4 : 3 verhalten soll.

Auflösung.

Man theile die Höhe ab (Fig. 459.), um der ersten Anforderung zu genügen, in drei gleiche Theile, mache ac zwei solchen Theilen gleich, ziehe bc und beschreibe damit aus b und aus c zwei Bogen dce und dbe, welche sich in d und e schneiden, verbinde diese Punkte durch die de, welche die Verlängerung der bh in f schneidet.

Dieser Durchschnitt f ist nun der Mittelpunkt, aus welchem mit bf der Bogen bc beschrieben und der Anlauf (Anschwung) konstruirt wird, der sich wie 2 : 3 verhält.

Will man aber, daß der Anschwung mehr vorspringen soll, als er hoch ist, will man ihn der Aufgabe nach wie 4 : 3 machen, so theile man dessen Höhe gh in drei gleiche Theile, nehme davon vier zu gi, ziehe ih und beschreibe damit aus h und i zwei Bogen ik und hk, welche sich in k schneiden. Beschreibt man nun aus k mit ik den Bogen ih, so ist die zweite Forderung der Aufgabe erfüllt.

§. 477.

Aufgabe.

Einen Rinnleisten zu zeichnen, dessen Auslaadung sich zur Höhe wie 2 : 3 verhält.

Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 460.) theile man in drei gleiche Theile, nehme deren zwei von a bis c, ziehe bc, halbire sie in d, beschreibe aus c, d und b mit cd Kreisbogen, welche, wie die Figur zeigt, die Mittelpunkte e und f geben, woraus die Bogen cd und bd mit cd beschrieben werden, welche den verlangten Rinnleisten bilden.

Auch kann man hier auf folgende Art verfahren: man bestimme nach der Aufgabe die ac (Fig. 461a.), ziehe bc, halbire sie in e und lege durch diesen Punkt

die de # ac und beschreibe aus c, e und b Kreisbogen mit ce, wodurch die Punkte f, g, k und l erhalten werden. Wird nun f und g, ferner k und l zusammengezogen durch die geraden Linien fg und kl, so erhält man die Durchschnitte h und i in der Verlängerung ed, woraus die Bogen ce und eb mit he konstruirt werden.

§. 478.

Aufgabe.

Einen Kehlleisten zu zeichnen, der sich wie 3 : 4 verhält.

Auflösung.

Die Höhe ab (Fig. 461b.) wird in vier gleiche Theile getheilt und zu ac werden drei dieser Theile genommen. Nun ziehe man bc halbire sie in d und beschreibe aus den Punkten c, d und b mit cd die Kreisbogen de, ce, bf und df, welche, wie die Figur zeigt, die Durchschnitte e und f geben, woraus mit cd die Bogen cd und bd beschrieben werden, die den verlangten Kehlleisten bilden.

Oder:

Man mache ig so groß wie ca, ziehe ih, halbire sie in k und beschreibe aus i, k und h mit ik vier Bogen, welche sich in n, o, q und r schneiden. Diese Durchschnittspunkte verbinde man durch die Linien no und qr, wodurch auf gi und auf der Verlängerung der ht die Mittelpunkte p und s bestimmt werden, aus denen man mit pi die Bogen ik und kh beschreibt, welche den verlangten Kehlleisten bilden.

§. 479.

Aufgabe.

Einen scharfen Kehlleisten zu konstruiren.

Auflösung.

Von den fünf Theilen, in welche man die Höhe ab (Fig. 462.) getheilt hat, nehme man drei zu bh, errichte in h auf bh ein Loth fh, ziehe durch den ersten Theil e die eg # bh, beschreibe aus f mit fh den Bogen gh, mache ac so groß wie zwei Fünftheil der ab, lege durch den zweiten Theilpunkt l die lm # bh, beschreibe aus c mit ac den Bogen ad und verlängere ihn will-

kürlich, setze von e einen Theil bis i auf die eg und beschreibe aus i mit ig einen Bogen gk, welcher den aus c mit ac geschlagenen Bogen in k schneidet und dadurch den scharfen Kehlleisten beendet.

Sechszehnte Abtheilung.

Konstruction der Netze zu Anfertigung regulärer und unregulärer Körper.

§. 480.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Tetraëder zu zeichnen.

Auflösung.

Man beschreibe ein gleichseitiges Dreieck def (Fig. 463.), theile jede seiner Seiten bei a, b und c in die Hälfte und verbinde diese Punkte durch gerade Linien, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck abc, welches mit seinen Spitzen in den Seiten de, ef und df liegt. Die Linien ab, ac, bc, ed, ef und df bilden die Kanten des Körpers und wenn die Figur etwa auf Pappendeckel gezeichnet und bei de, ef und df beschnitten ist, so mache man in den Linien ab, ac und bc subtile Einschnitte, an denen der Pappendeckel zusammengebrochen werden kann, woraus dann der Tetraëder gebildet wird.

§. 481.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Hexaëder (Würfel) zu entwerfen.

Auflösung.

Um ein Quadrat abcd (Fig. 464.) bringe man noch vier adef dem Quadrat abcd gleich große Quadrate adef, abhg, bcmi und cdon an und setze noch ein solches Quadrat iklm daran, etwa an im. Wird nun diese Figur beschnitten und wie die Linien ab, bc, cd, ad und im zeigen, zusammengesetzt, so erhält man den verlangten Würfel.

§. 482.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Oktaëder zu bilden.

Auflösung.

Man bringe acht gleichseitige Dreiecke **abc**, **bch**, **bih**, **cgh**, **cdg**, **dgf**, **def** und **fgk**, wie die Fig. 465. zeigt, an einander und breche sie in ihren Kanten, die durch diejenigen Linien bezeichnet sind, welche innerhalb der Figur liegen, gehörig zusammen, so erhält man ein Oktaëder.

§. 483.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Dodekaëder zu zeichnen.

Auflösung.

Man konstruire auf irgend einer Seite **ab** (Fig. 466.) ein reguläres Fünfeck (§. 112.) **abcde** und setze an jede Seite desselben wiederum ein solches Polygon. Man setze nämlich auf **ab** das Fünfeck **ablki**; auf **bc** das Fünfeck **beonm** u. s. f., bis man die Fünfecke **cdrqp**, **deuts** und **aefgh** erhalten hat. Dieses Verfahren wiederhole man und bilde durch das Zusammenbrechen der Kanten **ab**, **bc**, **cd**, **de** und **ea** ꝛc. das Dodekaëder.

§. 484.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Ikosaëder zu entwerfen.

Auflösung.

Wie Figur 467 zeigt, so bringe man zwanzig gleichgroße gleichseitige Dreiecke in einer Reihe an einander. Die innerhalb dieser Figur liegenden Linien jeder Seiten der Dreiecke sind Kanten des Körpers und bestimmen, wo das Netz zusammengebrochen werden muß.

§. 485.

Aufgabe.

Das Netz zu einer Kugel zu konstruiren.

Auflösung.

Man schlage einen Kreis **adbt** (Fig. 468.), theile dessen Peripherie in so viel gleiche Theile, als man ver-

langt, daß die Kugel Theile haben soll, ziehe aus dem Mittelpunkt d eines Theiles e f einen Halbmesser c d, nehme auf einem Viertel der Peripherie beliebige Punkte p, q, r, s ꝛc. an, fälle von diesen Punkten auf a b Lothe p λ, q Φ, r ψ, s μ und t c, beschreibe aus c mit c μ, c ψ, c Φ, c λ Halbkreise, ziehe eine gerade Linie z z, trage auf sie von ν bis u die Entfernung a p, von u bis ω die p q, von ω bis x die q r, von x bis y die r s und von y bis z die s t und errichte in diesen Punkten auf der z z Lothe. Nach dieser Vorbereitung trage man die d e = d f von ν nach e und von ν nach f; g δ = δ h setze man von u nach g und von u nach h; ferner mache man i ω = ω k so groß wie i γ = γ k; l x = x m mache man so groß wie n α = α o. Durch dieses Verfahren bekommt auf beiden Seiten der Linie z z Punkte, welche durch eine einzige krumme Linie auf jeder Seite zusammengezogen werden. Bringt man nun alle auf diese Art gezeichneten Theile, deren hier sechszehn sind, so wie A zeigt, an einander, so erhält man, wenn diese Theile gehörig zusammengebogen werden, eine Kugel.

Es versteht sich von selbst, daß die Kugelform desto eher erreicht wird, je kleiner man e f macht, d. h. in desto mehr Theile man den Kreis theilt.

Beim Anfertigen einer solchen Kugel ist es allemal vortheilhaft, die Streifen, welche eben die Kugel bilden sollen, in ihrer Mitte bei der Linie ϱ ϱ zusammenzulassen.

§. 486.

Aufgabe.

Die Netze zu einem Parallelepipedum und zu einem Prisma zu bilden.

Auflösung.

Man bringe vier gleichgroße Rechtecke b, b, b, b (Fig. 469.) mit ihren langen Seiten an einander und beschreibe über deren schmalen Seiten zwei Quadrate a, a, welche man, wie die Figur zeigt, mit einander verbindet.

Um das Netz zu einem drei-, fünf- oder nseitigen geraden Prisma zu konstruiren, bringe man drei-, fünf- oder n gleichgroße Rechtecke b (Fig. 470.) an einander und setze an deren schmale Seiten reguläre drei-, fünf- oder n Ecke a an.

Wenn das Prisma schief seyn soll, so setze man an eine seiner Seiten, etwa an dfgh, die Dreiecke def und ghi, welche die Grundflächen des Prismas bilden sollen, indem man de = hi und ef = gi macht. Nun beschreibe man aus d mit de einen Bogen eol, trage in denselben die dl, mache lk # dh und hk # dl. Jetzt mache man den Winkel hdp = ldh, die dp = dl und ziehe fp. Ferner mache man mfg = gfp und fm = ef, ziehe gn # fm und mn # fg. Die Figur gihkldefmng ist dann das Netz des schiefen Prismas.

§. 487.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Parallelepipedum zu fertigen, dessen Querprofil ein Rechteck ist.

Auflösung.

Man zeichne das Rechteck abcd (Fig. 471.) und setze an dessen größere Seite ab das Rechteck abfe und an ef lege man efgh = abcd. Ferner mache man ak = ad, ie = ad, eh = ad, ziehe ik, trage bc von b nach l, mache ln = ab, fm = fg, mo = ln und ziehe lm und n, wodurch das Netz beendet ist.

§. 488.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Prisma zu konstruiren, dessen Grundfläche ein Paralleltrapez ist:

Auflösung.

Unter ab zeichne man von beliebiger Größe das Parallelogramm abkg (Fig. 472), mache ae = ad und bo = bc; konstruire hierauf die Rechtecke aefg und bolk, mache on = cd, bilde das Rechteck mnol und trage das Paralleltrapez abcd auf gk, so daß ghik = abcd wird; es ist hiernach das verlangte Netz entworfen.

§. 489.

Aufgabe.

Netze zu drei-, vier- und nseitigen Pyramiden zu bilden.

Auflösung.

Man zeichne die Grundfläche **abc** (Fig. 473), sie mag eine drei-, vier- oder n seitige Figur seyn, halbire, wenn deren Grundfläche regulär ist, eine ihrer Seiten **ab** in **n**, errichte in diesem Punkt auf **ab** ein Loth **ne**, welches man, je nachdem die Pyramide hoch oder niedrig werden soll, länger oder kürzer machen kann, und ziehe **ae** und **be**. Hierdurch erhält man ein Dreieck **abe**, welches an jede Seite der Grundfläche der Pyramide getragen werden muß, so daß $\triangle$ **acg** $\cong \triangle$ **bcf** $\cong \triangle$ **abe** wird, und wodurch dann das verlangte Netz beendet ist.

Hat man indeß die Pyramidenhöhe erhalten, so trage man diese als Kathete an einen rechten Winkel **i**, mache dessen andere Kathete $\mathbf{il} = \mathbf{an} = \frac{\mathbf{ab}}{2}$ und setze die Hypothenuse **kl** von **n** nach **e**, ziehe **ae** und **be** und verfahre übrigens wie hier gelehrt wurde.

Im Fall aber die Grundfläche eine irreguläre Figur, etwa **nopq** ist, so nehme man innerhalb derselben einen Punkt **r** an, der lothrecht unter der Pyramiden Spitze seyn wird, ziehe von ihm an alle Seiten **no**, **op**, **pq** und **qn** der Basis Lothe **rs**, **rt**, **ru** und **rv** und verlängere die Lothe. Eines derselben, z. B. **sw**, mache man beliebig lang oder bestimme es, wenn die Pyramidenhöhe gegeben ist, aus **ik** und **il**, wo aber **il** = **sr** gemacht werden muß, indem dann **sw** = **kl** seyn muß und ziehe **nw** und **qw**, wodurch das Dreieck **wqn** erhalten wird. Nun trage man **rt** von **i** nach **l**, ziehe **lk** und mache **tx** = **kl**, ziehe dann die **nx** und **ox**; ferner setze man **ru** von **i** noch nach **l** und trage die Länge **kl** von **u** nach **y**; geschieht dasselbe mit **vz**, so erhält man die Dreiecke **nox**, **opy** und **pqz**, wodurch das gesuchte Netz erhalten ist.

§. 490.

Aufgabe.

Das Netz zu einer abgestutzten vierseitigen Pyramide zu konstruiren, wenn deren Basis eine reguläre Figur ist, oder doch wenigstens eine rechtwinklige.

Auflösung.

Man entwerfe die Grundfläche abcd (Fig. 474.), ziehe die Diagonalen ac und bd, mache efgh so groß, wie die kleinere Grundfläche werden soll, fälle von e und f auf ab, von g und h auf cd, von e und h auf ad und von f und g auf bc Lothe und verlängere sie beliebig, oder so weit, als es die Höhe der Pyramide verlangt, so daß im = kl = sp = rq werde. Zieht man nun ml, rs, ferner am, bl, as und dr und macht man bcvw = adrs und cdno = ablm, so ist das Netz der abgestutzten Pyramide beendet.

§. 491.

Aufgabe.

Das Netz einer abgestutzten Pyramide, deren Grundfläche irreguläre Figuren sind, zu entwerfen.

Auflösung.

Es sey abcde (Fig. 475) das irreguläre Fünfeck die Grundfläche der Pyramide und die ihr ähnliche Figur hiklm sey die andere Grundfläche. Von h und i fälle man auf ab die Lothe ht und iu von beliebiger oder von bestimmter Länge; eben so fälle man von h und m auf ae die Perpendikel hv = mw = ht. Ferner mache man mn = lo = ht lothrecht auf lm; lp = kq = ht lothrecht auf kl und ks = ir = ht normal auf bc; ziehe tu, vw, no, pq und rs; ferner: ub, at, av, ew, en, do, dp, cq, cs, br und ab. Endlich mache man nozyx ≅ hiklm und zwar dergestalt, daß xn = mh, xy = hi, oz = kl und yz = ik wird. Die hierdurch entstandene Figur ist das Netz der abgestutzten Pyarmide.

§. 492.

Aufgabe.

Das Netz zu einem geraden Cylinder zu zeichnen, dessen Grundflächen mit einander parallel sind.

Auflösung.

Mit dem Halbmesser ag (Fig. 476) beschreibe man einen Kreis, verlängere ag bis gh, der Höhe des Cylin-

ders gleich ist, mache bh = ag und beschreibe aus b mit bh ebenfalls einen Kreis. Nun rektificire man entweder durch Rechnung oder nach §. 189 durch Konstruction die Peripherie des Kreises der Grundfläche, mache de zur Tangente an g (§. 29) und trage die halbe Peripherie von g nach d und von g nach e. Legt man nun auch an h eine Tangente cf und macht man ch = dg, fh = eg, zieht man übrigens noch cd und ef, so ist das verlangte Netz beendet.

§. 493.

Aufgabe.

Das Netz zu einem schrägen Cylinder zu finden, dessen Grundflächen mit einander parallel und vollkommene Kreise sind.

Auflösung.

Mit dem Halbmesser ag (Fig. 477) beschreibe man aus a einen Kreis, lege an denselben an g eine Tangente de = der Peripherie der Grundfläche (§. 189). An den Berührungspunkt g trage man dg = ge = $\frac{1}{2}$ de und lege die gh an de unter einem solchen Winkel, wie der ist, welchen der Cylinder, wenn er auf einer Grundfläche steht, mit dem Horizont macht, gebe ihm eine etwa bestimmte Länge gh, lege cf # de und ziehe sowohl cd als auch ef # gh. Legt man nun an h mit dem Halbmesser bh = ag einen Kreis, so ist das sogenannte Netz des schrägen Cylinders beendet.

§. 494.

Aufgabe.

Das Netz zu einem schrägen Cylinder, dessen Grundflächen nicht parallel sind, zu konstruiren.

Auflösung.

Es sey hnou (Fig. 478) das Profil des Cylinders und acb dessen Grundfläche bei hn, oder der auf die Seiten uh und on senkrecht gefällte Durchschnitt des Cylinders. Man theile die Peripherie des Halbkreises in mehrere, etwa in sechs gleiche Theile bei d, e, c, f, g und ziehe durch diese Punkte Parallelen mit du oder no.

Nach dieser Vorbereitung ziehe man die wx, welche so lang wie die Peripherie des Kreises acb seyn muß und setze an deren Halbirungspunkt v einen Kreis, der so groß ist wie die Grundfläche, welches geschieht, wenn man in v auf wx ein Loth v ϰ errichtet und es so lang wie den Radius des Kreises acb macht: ϰ ist dann das Centrum, aus welchem der Kreis an die wx beschrieben werden kann. In wv und x errichte man auf wx Lothe und theile die vw in so viel gleiche Theile, als deren die Peripherie acb enthält; folglich hier in sechs und errichte auch in diesen Theilpunkten Perpentikels auf wx. Nun mache man

$$\begin{aligned} wu &= on, \\ vz &= mp, \\ \omega\alpha &= lq, \\ \varrho\beta &= cr, \\ \zeta\gamma &= ks, \\ \vartheta\delta &= te \text{ und} \\ v\lambda &= uh. \end{aligned}$$

Eben so verfahre man über der vx, verbinde dann die Punkte u, z, α, β, γ, δ, λ ꝛc. durch eine krumme Linie. Verlängert man endlich νλ, bis λϱ = uo ist und macht man φψ = ab; setzt man ferner diese Linie dergestalt unter einem rechten Winkel an λϱ, daß sowohl φψ als auch λϱ sich in ihren Halbirungspunkten treffen, und konstruirt man zu dieser Linie eine Ellipse (§. 159), so ist das verlangte Netz konstruirt.

§. 495.

Aufgabe.

Das Netz zu einem solchen Cylinder zu entwerfen, dessen Grundflächen keine rechten Winkel mit den Seiten ad und bc (Fig. 479.) bilden.

Auflösung.

Auf ad oder bc errichte man ein Loth ef, beschreibe darüber einen Halbkreis, theile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ziehe durch jeden Theilpunkt eine gerade Linie ∥ ad oder ∥ bc. Dies als Vorbereitung. Nun ziehe man eine gerade Linie rs, die so lang ist, als die Peripherie des Kreises, der zu dem Durchmesser ef gehört (§. 189), halbire sie bei ϱ und theile jede

ihrer Hälften in so viel Theile, als in wie viel Theile die Peripherie über e f getheilt wurde. Nun mache man die Linien ϱ x = d f,

1 = g φ,
2 = h ψ,
3 = i π,
4 = k ϑ,
5 = l z,
r w = c e,

und verfahre auf der Seite A auf dieselbe Art. Ferner mache man

u ϱ = a f,
6 = m φ,
7 = n ψ,
8 = o π,
9 = p γ,
10 = q z,
v r = b e

und verrichte dasselbe auf der Seite B; ziehe dann alle Punkte auf beiden Seiten so zusammen, wie die Figur zeigt, verlängere die u x, bis x α = c d, u δ = a b wird und mache sowohl λ μ, als β γ = e f, bringe λ μ mit δ u dergestalt zusammen, daß man sie als Achsen zur Konstruction einer Ellipse benutzen kann (§. 159); mache dasselbe mit α x und β γ und konstruire die Ellipsen, wodurch endlich das Netz beendet ist.

§. 496.

Aufgabe.

Das Netz zu einem abgestutzten Kegel a b c d (Fig. 480.), dessen Grundflächen nicht parallel sind, zu finden.

Auflösung.

Man zeichne das Profil des abgestutzten Kegels, dessen Netz entworfen werden soll, verlängere die Seiten a b und c d so weit, bis sie sich in u berühren; beschreibe unter b c einen Halbkreis b g c, theile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher (etwa sechs) Theile, fälle von diesen Theilpunkten auf die b c die Lothe e e, f f, g g, h h und i i, ziehe von b c aus e, f, g, h und i nach u die e k, f l, g m, h n und i o; mache s k, dann t l, m r, n q und o p # b c, beschreibe mit 27 s aus 27, mit 28 t

aus 28, mit 29 q aus 29 und mit 30 p aus 30 Viertelkreise und fälle aus den Punkten k, l, n und o die Perpendikel k v, l w, n x und o y bis an die Peripherien dieser Viertelkreise. Wenn man diese Vorbereitung beendet hat, so beschreibe man um z mit b g einen Kreis und verlängere dessen Halbmesser z 15 beliebig. Nun mache man 15•2 = b u, beschreibe aus 2 mit b u einen Bogen 1•15•3, mache 1•15 der halben Peripherie des Kreises um z gleich und den Bogen 15•3 mache man eben so groß. Ferner theile man den Bogen 1•15 in sechs gleiche Theile, nämlich in so viel Theile, als deren die Peripherie b g c erhalten hat und ziehe die Halbmesser 1•2, 4•2, 5•2, 6•2, 7•2, 8•2 ꝛc. Hierauf mache man:

15•14 = a b,
8•13 = b s,
7•12 = b t,
6•11 = c r,
5•10 = c q,
4•9 = c p und
1•27 = c d.

Aehnlich operirt man auf der Seite A und zieht dann die Punkte 9, 10, 11, 12 ꝛc. durch eine krumme Linie zusammen.

Endlich mache man

14•17 = a k,
14•18 = a l,
14•19 = a m,
14•31 = a n,
14•20 = a o und
14•21 = a d;

errichte in den so eben auf 14•21 bestimmten Punkten Lothe und mache

17•26 = k v,
18•25 = l w,
19•24 = m r,
31•23 = n x
20•22 = o y und

verfahre eben so auf der Seite B.

Werden nun die Punkte 14, 26, 25, 24, 23, 22 und 21, so wie die denselben ähnlich liegenden Punkte auf der Seite B durch eine Linie, welche eine Ellipse bildet, ver-

bunden, so hat man das Netz zu dem abgestutzten Kegel mit nicht parallelen Grundflächen konstruirt.

§. 497.

Aufgabe.

Das Netz zu einem geraden Kegel zu entwerfen.

Auflösung.

Man beschreibe mit **ab** (Fig. 481.) einen der Grundfläche des Kegels gleichen Kreis, verlängere dessen Halbmesser **ab**, bis **be** so groß wird, als die Seitenlinie des Kegels seyn soll; beschreibe aus **e** mit **be** einen Bogen **cbd**, welchen man der Peripherie des Kreises um **a** gleich macht. Dies geschieht am besten, wenn man den Durchmesser **bf** in sieben gleiche Theile theilt und eilf solcher Theile von **b** nach **c** und von **b** nach **d** mit dem Zirkel trägt, zieht man nun **ce** und **de**, so ist das Netz zu dem geraden ganzen Kegel entworfen.

§. 498.

Aufgabe.

Das Netz zu einem abgestutzten geraden Kegel zu konstruiren, dessen Grundflächen mit einander parallel sind.

Auflösung.

Ist **abcd** (Fig. 482.) das Profil des abgestutzten Kegels, bei welchem **ab** # **cd** ist, so verlängere man dessen Seitenlinien **ad** und **bc**, bis sie sich in dem Punkt **e** berühren. Nun trage man **de** von **f** nach **g**, beschreibe aus **f** mit **fg** einen Bogen, mache Bogen **gi** = Bogen **gm** so groß wie die halbe Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser **cd** ist. Dies geschieht am leichtesten, wenn man **cd** in sieben gleiche Theile theilt und eilf solcher Theile von **g** nach **i** und von **g** nach **m** trägt. Jetzt ziehe man **fi** und **fm**, mache **fk** = **ae**, beschreibe aus **f** mit **fk** den Bogen **knl**, verlängere **fg**, bis **gh** = **cd** wird, beschreibe zu **gh** einen Kreis, mache **no** = **ab** und beschreibe auch zu **on** einen Kreis, wodurch das verlangte Netz beendet ist.

§. 499.

Aufgabe.

Das Netz zu einem aus sechs gleich großen Rauten **abcd** (Fig. 483.) bestehenden Körper zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Man bringe die Rauten, welche alle einander gleich seyn müssen, so an einander, wie die Figur zeigt. Der Winkel **kbh** wird so groß, wie **hec** oder **bcd** gemacht und ebenfalls mache man **hem = kbh = lmn**; daß dadurch **a = i = o = f** und **d = k = n = g** wird, versteht sich von selbst.

Andere Auflösung.

Man bringe sechs gleich große Rauten **a, b, c, d, e** und **f** so an einander, wie Fig. 484 zeigt.

§. 500.

Aufgabe.

Das Netz zu einem Prisma zu entwerfen, dessen Grundflächen gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke sind.

Auflösung.

Die Dreiecke **abc** (Fig. 485.) und **dhg** sind einander gleich und bei **a** und **g** rechtwinklig; die Länge des Prismas ist **cd**. Man beschreibe das Rechteck **bcdh**, in welchem die Breite **bc** der Hypothenuse der Dreiecke gleich ist. Nun verlängere man **bc** und **dh** auf beide Seiten und mache **bk = ab**, ferner **cf = ac**. Werden endlich durch **k** und durch **f** mit **bh** Parallelen gelegt, so erhält man die Rechtecke **bhik** und **cdef**, wodurch das Netz beendet ist.

§. 501.

Aufgabe.

Die Netze zweier Körper zu entwerfen, von denen der eine wie ein deutsches, von allen Seiten abgewalmtes Dach, der andere wie ein deutsches Dach mit ganzem und halben Walm gestaltet ist.

Auflösung.

Wenn die Linien **bh** (Fig. 487.), **ah, hi, im** und **si** auf der Grundfläche **abcd** andeuten, welche Lage die Kanten des Körpers haben sollen, so verlängere man **hi**, nehme **bh** in den Zirkel und mache **te = bh** und ziehe **ae**. Hierauf trage man die halbe Breite **ae** der **cd** von **u** nach **l**, ziehe **cl** und **dl**, errichte in **m** auf **cd** ein Loth

mn und mache no # cd. Nun errichte man in b, h, i und u auf der bc Lothe, mache bf = te, ziehe fk # bc, ziehe bg, mache cr = cu, lege qr # bc und ziehe kr. Ferner mache man zp = qk, ziehe np und op und bilde die Fläche B ganz so wie die bcrkg: es ist hierdurch das Netz zu einem Körper gefunden, der wie ein deutsches Dach gestaltet ist, welches einen ganzen und einen halben Walm hat.

Wenn abcd (Fig. 486.) der Grundriß ist und am, bm, lm, cl und dl die Grade oder Kanten des Körpers sind, so verlängere man die lm auf beiden Seiten gegen g und k, errichte auf gk in l und m Lothe, trage die bm von n nach h und von o nach g, mache lk = mg = mh, ferner fm = mh, lege die ef und die hi # gk und ziehe af, ag, bg, bh, ci, ck, dk und de, wodurch das Netz eines Körpers beendet ist, welcher wie ein deutsches, von allen Seiten abgewalmtes Dach gestaltet ist.

§. 502.

Aufgabe.

Das Netz eines Körpers zu konstruiren, der wie ein gebrochenes Dach gestaltet und an einer Seite abgewalmt ist.

Auflösung.

An die Seite ad (Fig. 488.) der Grundfläche abcd setze man das lothrechte Profil adefg dieses Körpers, ziehe ci und bi unter einer Neigung von 45° gegen bc, mache ek und go # ab und ziehe ko. Hierauf fälle man von i auf ab ein Loth, verlängere ad und ko auf beide Seiten, mache dh = as = de, hl = st = ef, ziehe durch l, h, s und t mit ab die Parallelen li, hx, sr und tu und verbinde i mit x, x mit c, c mit b, b mit r und r mit u. Verlängert man nun ek und go, bis vm = wn = dh ist, macht man pq = ix und zieht man cm, mq, nq und bn, so ist das verlangte Netz beendet *).

---

*) Das Anfertigen der Netze zu allen Arten von Dächern wird in einem eigenen Werke, welches über das Ausmitteln, Projectiren der krummen Grad- und Kehlsparren, über das Ermitteln der Forst-, Grad- und Kehllinien, über das Bilden der Treppen, Schablonen ꝛc. handeln wird, umständlich aus einander gesetzt werden.

§. 503.

Ein Netz zu einem Körper, welcher von achtzehn Quadraten und von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, bei denen jede Seite der des Quadrats gleich ist, zeigt Figur 489. An ein aus acht Quadraten bestehendes Rechteck schließen sich zu beiden Seiten abwechselnd vier Dreiecke und vier Quadrate an, und an das eine der hierdurch gebildeten, aus drei Quadraten bestehenden Rechtecke kommt noch ein Quadrat auf jeder Seite.

§. 504.

Wie vier reguläre Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke das Netz zu einem von diesen Figuren eingeschlossenen Körper bilden können, zeigt Fig. 490. Die Seite eines jeden Dreiecks ist der Seite eines jeden der hier angewendeten Sechsecke gleich. Welche Kunstgriffe beim Konstruiren dieses Netzes angewendet werden können, um es auf dem kürzesten Wege zu erhalten, zeigen die in die Figur gezeichneten Hilfslinien.

§. 505.

Bringt man sechs gleichseitige Achtecke, wie Fig. 491 zeigt, an einander und setzt man an die drei ersten von den vieren, welche eine Reihe bilden, noch acht gleichseitige Dreiecke, so erhält man das Netz zu einem von diesen Figuren eingeschlossenen vierzehnseitigen Körper.

§. 506.

Nimmt man irgend eine begrenzte gerade Linie und konstruirt man über derselben ein gleichseitiges Dreieck und ein reguläres Zehneck und bringt man sechs dieser Zehnecke und zehn solcher Dreiecke so an einander, wie Fig. 492 zeigt, so bekommt man die Hälfte des Netzes eines Körpers, der von zwölf regulären Zehnecken und von zwanzig gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist.

§. 507.

Werden sechs Quadrate konstruirt und acht gleichseitige Dreiecke, bei denen die Seiten den Seiten der Quadrate gleich sind, gebildet und werden diese neunzehn Figuren nach Fig. 493 an einander gebracht, so erhält man

dadurch ein Netz zu einem geschlossenen Körper, dessen Seitenflächen sechs Quadrate und acht gleichseitige Dreiecke sind.

§. 508.

Bringt man sechs reguläre Fünfecke (Fig. 494) und zehn gleichseitige (über den Seiten der Fünfecke beschriebene) Dreiecke, wie die Figur zeigt, an einander, so gibt dies die Hälfte eines Netzes zu einem von zweiunddreißig Seitenflächen eingeschlossenen Körper.

§. 509.

Sechs gleich große Quadrate und zweiunddreißig ebenfalls einander gleiche, gleichseitige Dreiecke bilden, wie Figur 495 zeigt, das Netz zu einem Körper, der von achtunddreißig Flächen begrenzt ist. Daß die Seiten der Dreiecke und Quadrate einander gleich seyn müssen, dürfte hier wohl nicht erwähnt werden, da es Jedem, welcher Körper durch Netze formen will, wohl einleuchtet, daß diejenigen Seiten, welche an einander genau anschließen sollen, welche Kanten von gleichen Längen bilden müssen, nicht ungleich seyn können.

§. 510.

Aus dem Netze Figur 496 kann man einen Körper von vierzehn Seitenflächen bilden. Es werden nämlich sechs Quadrate und acht reguläre Sechsecke, deren Seiten denen der Quadrate gleich sind, gebildet und, wie die Figur zeigt, an einander gebracht.

§. 511.

Figur 497 zeigt die Hälfte des Netzes zu einem Körper, der von zwölf regulären Fünfecks und zwanzig regulären Sechsecken eingeschlossen ist. Die Seite des Fünfecken hier ist der Seite des Sechsecken gleich.

§. 512.

Fig. 498 zeigt die Hälfte eines Netzes zu einem von zwölf regulären Fünfecken und achtzig gleichseitigen Dreiecken eingeschlossenen Körpers. Die Dreiecksseiten hier sind den Fünfecksseiten gleich.

§. 513.

Um zu einem Körper, der von zwanzig gleichseitigen Dreiecken, von dreißig Quadraten und von zwölf regulä-

ren Fünfecken, also von zweiundsechszig ebenen regulären Figuren eingeschlossen ist, das Netz zu entwerfen, bringe man sechs reguläre Fünfecke, zehn gleichseitige Dreiecke und zwanzig Quadrate so an einander, wie aus Fig. 499 deutlich wird, konstruire diese Figur noch einmal und lasse dann die mit Diagonalen bezeichneten Quadrate weg. Beide solchergestalt entworfene Figuren bilden das verlangte Netz. Auch hier sind die Seiten des Dreiecks denen des Quadrats und denen des Fünfecks gleich.

§. 514.

Das Netz zu einem von sechsundzwanzig Seiten eingeschlossenen Körper, welches Fig. 500 zeigt, besteht aus sechs regulären Achtecken, acht dergleichen Sechsecken und zwölf Quadraten. Auch hier muß die Quadratseite der des Fünfecks gleich seyn.

§. 515.

Bringt man zwanzig Quadrate, sechs reguläre Zehnecke und zehn dergleichen Sechsecke so an einander, wie Fig. 501 zeigt und macht man diese Figur noch einmal, wobei man jedoch die zehn durch Diagonalen bezeichneten äußern Quadrate wegläßt, so erhält man aus beiden Figuren das Netz zu einem von zweiundsechszig Seiten begrenzten Körper. Zu merken ist, daß die Quadrat-, die Sechsecks- und Zehnecksseiten einander gleich sind.

§. 516.

Fig. 502 zeigt einen von zwölf kongruenten Rauten begrenzten Körper, der Rhomboidal-Dodekaëder genannt wird, und Fig. 503 ist die Hälfte eines von dreißig kongruenten Rauten eingeschlossenen Körpers, der Rhomboidal-Triakontaëder heißt.

§. 517.

Fig. 504 zeigt das Netz eines Körpers, dessen Seitenflächen aus zwölf einander gleichen, aber irregulären Sechsecken und sechs gleich großen Rechtecken bestehen, und es ist daher dieses Netz zu einem Körper gehörig, der von achtzehn Seitenflächen begrenzt ist.

Zweiter Abschnitt.

Erste Abtheilung.

Verwandlung ebener Figuren.

§. 518.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches mit dem gegebenen gleiche Höhe und einerlei Grundlinie hat.

Auflösung.

Wenn **abc** (Fig. 505.) das gegebene Dreieck ist, so lege man durch dessen Spitze **a** die **de # bc** und nehme auf dieser Linie einen beliebigen Punkt **f** an. Verbindet man nun **f** mit **b** und **f** mit **c**, so ist

$$\triangle bcf = \triangle abc.$$

Hätte man in **de** einen andern Punkt, etwa **g** genommen und **bg** und **cg** gezogen, so wäre

$$\triangle bcg = \triangle abc$$

geworden.

Beweis *).

Weil die Gipfel **f**, **e** und **a** der Dreiecke **bcf**, **cbg** und **abc** in einer geraden Linie **de** liegen, welche nach der Auflösung mit **bc** parallel ist, so haben diese Dreiecke gleiche Höhen. Nun ist aber auch **bc** deren gemeinschaftliche Grundlinie, folglich:

$$\triangle bcf = abc \text{ und}$$
$$\triangle bcg = abc.$$

*) In der Vorrede ist der Grund angeführt, warum die Auflösungen dieses Abschnitts von Beweisen begleitet sind.

Auflösung für den Fall, wenn das gegebene Dreieck abc (Fig. 506a) in ein rechtwinkliges verwandelt werden soll.

Auf der Grundlinie **bc** errichte man entweder in **b** oder in **c** einen Perpendikel **bd**, ziehe auch **eaf # bc** und verbinde **c** mit **e** durch die **ce**: es ist sodann das bei **b** rechtwinklige

$$\triangle bce = \triangle abc.$$

Beweis.

Daß das $\triangle bce = \triangle abc$ ist, enthält die erste Auflösung und weil **bd** lothrecht auf **bc** gemacht wurde, so ist auch $ebc = R$, folglich das $\triangle ebc$ rechtwinklig und daher bewiesen, was zu beweisen war.

Auflösung für den Fall, wenn das Dreieck einen bestimmten Winkel m (Fig. 506b) an der Grundlinie bc haben soll.

Man lege durch **a** die **de # bc**, mache $bcf = m$ und verlängere den Schenkel **cf** so weit, bis davon die **de** in **f** berührt wird. Zieht man nun die **bf**, so ist das

$$\triangle bcf = \triangle abc$$

und es hat den Winkel $bcf = m$ an seiner Basis **bc**.

Auflösung für den Fall, wenn ein stumpfwinkliges Dreieck bcf (Fig. 506b) in ein spitzwinkliges verwandelt werden soll.

Man verfahre wie bei den vorhergehenden Fällen und lege die Linie **ac** in eine solche Richtung, daß der Winkel $acb < R$ wird. Zieht man nun **ab**, so ist die Verwandlung vollzogen.

Beweis.

Die vorhergehenden Fälle enthalten denselben.

Auflösung für den Fall, wenn das gegebene Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln ist.

Man halbire die Grundlinie **bc** (Fig. 507.) in **e**, errichte in diesem Punkt auf **bc** ein Loth, lege durch **a** die **ad # bc**, verlängere das in **e** errichtete Loth bis **f** an die **ad**, ziehe **bf** und **cf** und es ist dann das gleichschenklige

$$\triangle bcf = abc.$$

Beweis.

Weil **bc = ce** ist und weil **ef** in **e** auf der **bc** normal steht, so ist auch **bf = cf**, folglich ist das △ **bcf** gleichschenklig, und weil das △ **bcf** mit dem △ **abc** einerlei Grundlinie **bc** und gleiche Höhe hat, so sind die Dreiecke einander gleich.

§. 519.

Aufgabe.

Ein Dreieck acb (Fig. 339.) in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 343 enthält die Auflösung.

Beweis.

Weil 1) **gh # ae** und
2) **gi # ce**, so ist auch
3) **ghi = eac** und
4) **gih = eca**; folglich
5) △ **ghi ∽** △ **aec**;

und weil das Dreieck **ace** gleichseitig gemacht wurde, so ist auch das Dreieck **ghi** ein gleichseitiges.

Nun ist ferner nach der Konstruction:

6) **df = dg** und aus demselben Grunde
7) **bd : df = df : de** (nach dem Satze: wird von dem Gipfel eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypothenuse ein Perpendikel gefällt, so wird dadurch die Hypothenuse in zwei Segmente zerlegt und es ist dann jede Kathete das geometrische Mittel zwischen der ganzen Hypothenuse und dem der Kathete anliegenden Segment).

Nimmt man den Werth aus 6 nach 7, so erhält man

8) **bd : dg = dg : de.**

Wegen 5, das ist: wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke **ghi** nur **aec** steht:

9) **dh : ad = dg : de,**

und aus der Verbindung der Werthe aus 8 und 9 folgt:

10) **bd : dg = dh : ad;**

diese Proportion gibt aber:

11) **dg × dh = bd × ad.**

Nun ist

12) $\frac{dg \times dh}{2} = \triangle ghi$ und

$\frac{bd \times ad}{2} = \triangle abc$ oder

13) $dg \times dh = 2 \triangle ghi$ und

$bd \times ad = 2 \triangle abc$.

Bringt man 13 nach 11, so erhält man:

14) $2 \triangle ghi = 2 \triangle abc$

oder 15) $\triangle ghi = \triangle abc$.

Da indeß das gegebene Dreieck **ack** in das Dreieck **abc** verwandelt wurde, so ist auch:

16) $\triangle ghi = \triangle ack$.

Weil nun die Gleichseitigkeit des Dreiecks **ghi** aus 5 hervorgeht und 16 die Gleichheit zwischen dem gegebenen und dem gesuchten oder vielmehr verwandelten Dreieck darthut, so ist bewiesen, was zu beweisen war.

§. 520.

Aufgabe.

Ein Dreieck **abc** (Fig. 508.) in ein niedrigeres Dreieck, dessen Höhe **ad** gegeben ist, zu verwandeln.

Auflösung.

Man verlängere die Grundlinie **ac** willkürlich, etwa bis **f**, errichte in **a** auf **af** ein Loth **ad** und mache es der gegebenen Höhe **ad** gleich. Jetzt lege man durch **d** die **de** # **af**, ziehe **ce**, mache **bg** # **ce** und ziehe **eg**; es ist sodann

$\triangle aeg = \triangle abc$,

und das $\triangle aeg$ hat die gegebene Höhe **ad**.

Beweis.

Weil **de** # **ac** gemacht wurde, so ist auch die Höhe des Dreiecks **aeg** der **ad** gleich. Man darf daher nur beweisen, daß das $\triangle aeg = \triangle abc$ ist.

Weil **bf** # **bc** gemacht wurde, so ist auch

1) $\triangle ecg = \triangle bce$. Nun ist

2) $\triangle ace = \triangle ace$;

folglich, wenn Gleiches zu Gleichem, wenn 1 zu 2 kommt, so wird

3) $\Delta ecg + \Delta ace = \Delta bce + \Delta ace$

werden. Setzt man hier statt der Theile das Ganze, so ist

4) $\Delta aeg = \Delta abc$.

§. 521.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 509.) in ein anderes zu verwandeln, welches höher als das gegebene ist und eine bestimmte Höhe hat.

Auflösung.

In a auf der Grundlinie ac errichte man ein Loth ad und mache es der gegebenen Höhe gleich. Durch d lege man die dg # ac, verlängere ab bis e und ziehe ce. Wird nun durch b die bf # ce gelegt, so ist

$\Delta aef = \Delta abc$.

Beweis.

Weil de # ac gemacht wurde, so ist die Höhe des Dreiecks aef der gegebenen Höhe ad gleich; und man darf nur noch beweisen, daß $\Delta aef = \Delta abc$ ist.

Nun ist, weil bf # ce gemacht wurde:

1) $\Delta bef = \Delta bcf$ und weil
2) $\Delta abf = \Delta abf$, so wird
3) $\Delta bef + \Delta abf = \Delta bcf + \Delta abf$ oder
4) $\Delta aef = \Delta abc$ seyn.

§. 522.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 510.) in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Höhe der des gegebenen Dreiecks gleich ist.

Auflösung.

Auf bc errichte man in b ein Loth bh und lege durch a die de # bc. Theilt man nun bc bei f in zwei gleiche Theile und zieht man die fg # bh, so ist das Rechteck bdgf = Δabc und so hoch wie das Dreieck abc.

Beweis.

Weil de durch a geht und mit bc parallel ist, so hat das Rechteck bdgf eine Höhe bd oder fg, welche der des Dreiecks abc gleich ist.

Weil ferner

1) $bf = cf$ gemacht wurde, so ist auch wenn df gezogen wird:

2) $\Delta bdf = \frac{1}{2}\Delta abc$.

Nun ist aber

3) $\Delta bdf = \frac{1}{2}bdgf$, folglich wenn 2 mit 3 verbunden wird:

4) $\frac{1}{2}bdgf = \frac{1}{2}\Delta abc$ oder

5) $bdgf = \Delta abc$.

§. 523.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 511.) in ein Rechteck zu verwandeln, welches mit dem Dreick einerlei Grundlinie bc hat.

Auflösung.

In b auf der bc errichte man die Normale bd, mache $ae \# bc$, halbire entweder eb in f oder die ac in h und ziehe durch f oder durch h eine Parallele mit bc und es ist sodann das Rechteck

$$bcgf = \Delta abc;$$

und es hat das Rechteck mit dem gegebenen Dreieck einerlei Grundlinie bc.

Beweis.

Daß das Rechteck bcgf einerlei Grundlinie bc mit dem gegebenen Dreiecke abc hat, geht aus der Auflösung deutlich hervor; und daß $fbcg = \Delta abc$, wird auf folgende Art bewiesen:

Zieht man ce, so ist:

1) $\Delta bce = \Delta abc$;

und wenn man cf zieht, so ist:

2) $\Delta bcf = \frac{1}{2}\Delta bce = \frac{1}{2}\Delta abc$.

Es ist aber auch

3) $\Delta bcf = \frac{1}{2}bcgf$; folglich wegen 2 und 3:

4) $\frac{1}{2}bcgf = \frac{1}{2}\Delta abc$ oder

5) $bcgf = \Delta abc$.

§. 524.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Erste Auflösung.

Wenn **abc** (Fig. 512.) das gegebene Dreieck ist, so bestimme man dessen Höhe **bd** (indem man von **b** auf die **ac** ein Loth **bd** fällt), halbire sie in **e**, verlängere **ac**, bis **cf** = **de** wird und beschreibe über **af** einen Halbkreis **agf**. Wird nun in **c** auf **af** ein Loth **cg** errichtet und bis **g** an die Peripherie gezogen, so ist dies die Seite des dem Dreiecke **abc** gleichen Quadrats **hikl**, wenn nämlich **hi** = **cg** gemacht wird.

Beweis.

Es ist 1) $\triangle abc = ac \times de = ac \times \frac{1}{2} bd$
und es steht: 2) $ac : cg = cg : cf$;
und weil 3) $cf = \frac{1}{2} bd$, so wird aus 2:
4) $ac : cg = cg : \frac{1}{2} bd$.
Diese Proportion gibt
5) $\overline{cg}^2 = \frac{1}{2} ac \times bd$; und wenn man 1
nach 5 setzt: 6) $\overline{cg}^2 = \triangle abc$.
Da nun 7) $hi = cg$ gemacht wurde, so ist
8) $\overline{hi}^2 = \triangle abc$ oder
9) $hikl = \triangle abc$.

Andere Auflösung.

Von **b** (Fig. 513.) fälle man auf die Basis **ac** des Dreiecks **abc** ein Loth **bd** und verlängere es etwa bis **h**, theile **ac** bei **e** in die Hälfte, mache **bf** = **ce** und beschreibe über **df** einen Halbkreis. Wird nun in **bf** auf **dh** eine Normale **bg** errichtet und diese bis **g** an die Peripherie des Halbkreises gezogen, so ist sie die Seite des dem gegebenen Dreieck gleichen Quadrats; es ist nämlich:

$$\overline{bg}^2 = \triangle abc.$$

Beweis.

Wie der zur ersten Auflösung.

§. 525.

Aufgabe.

Jedes Rechteck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung.

Ist nicht bestimmt, daß etwa der Winkel **fab** = α (Fig. 514.) eine gegebene Größe haben soll, so nehme man auf einer Seite **cd** des Rechtecks **abcd** einen Punkt **f** willkürlich an, ziehe **af** und mache **be** # **af**, wenn man zuvor **cd** bis **e** verlängert hat; es ist sodann

abcd = **abef**.

Beweis.

Das Rechteck **abcd** hat mit dem Parallelogramm **abef** einerlei Grundlinie **ab** und einerlei Höhe, folglich ist, weil Parallelogramme und Rechtecke von einerlei Grundlinie und gleicher Höhe, einander gleich sind, das durch obige Konstruction erhaltene Parallelogramm dem gegebenen Rechtecke gleich.

Auflösung für den Fall, wenn der Winkel **fab** = α ein bestimmter ist.

Man mache **fab** = α (Fig. 514.), d. i. dem gegebenen Winkel gleich, verlängere **cd**, mache **be** # **af** und so lang, bis die **be** die Verlängerung der **cd** in **e** trifft; es ist dann **abef** das verlangte Parallelogramm.

Beweis.

Wie der vorstehende.

§. 526.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm **abef** (Fig. 514.) in ein Rechteck zu verwandeln, welches mit dem Parallelogramm einerlei Höhe und Grundlinie hat.

Auflösung.

Auf einer Seite des Parallelogramms, etwa auf **ab**, errichte man in **a** ein Loth und mache es so lang, daß es von der Verlängerung der **ef** in **d** getroffen wird. Zieht man nun durch **b** die **bc** # **ad**, so ist

abcd = **abef**.

Beweis.

Wie im vorhergehenden §.

§. 527.

Aufgabe.

Ein Dreieck **def** (Fig. 515.) in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung.

Man ziehe durch den Gipfel **f** des Dreiecks die **bg** # **de**, lege **ad** beliebig oder bringe sie in eine solche Lage, daß sie mit **de** einen etwa bestimmten Winkel **ade** macht. Theilt man nun **de** bei **c** in die Hälfte und zieht man **bc** # **ad**, so ist

abcd = △**def.**

Beweis.

Daß die Figur **abcd** ein Parallelogramm ist, geht aus der Auflösung hervor und daß eben dieses Parallelogramm, dem Dreiecke **def** gleich ist, folgt aus §. 523 und §. 525.

§. 528.

Aufgabe.

Ein Rechteck, folglich ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung.

Es sey **bg** (Fig. 511.) das gegebene Rechteck, so verlängere man nur seine Seiten, etwa **bf** und mache **fe** = **bf**. Zieht man nun **ce**, so ist

△**bce** = **bcgf.**

Beweis.

In den vorhergehenden Beweisen liegt der Beweis für diese Auflösung.

§. 529.

Sollte das Dreieck, in welches das Rechteck verwandelt wird, kein rechtwinkliges **bce** (Fig. 511.) seyn, sondern ein schiefwinkliges werden, so lege man durch **e** die **ae** # **bc**, nehme auf **ae** einen Punkt **a** an und ziehe **ab** und **ac**, wodurch ein Dreieck **abc** erhalten wird, welches dem gegebenen Rechteck gleich ist. Ist etwa noch bestimmt, daß der Winkel **abc** irgend einem gegebenen Winkel α gleich seyn soll, so darf man nur an **b** auf die **bc** den gegebenen Winkel tragen und im Uebrigen konstruiren, wie gelehrt wurde.

§. 530.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein Dreieck, es mag rechtwinkig oder schiefwinklig seyn, zu verwandeln.

Auflösung.

Wenn **abcd** (Fig. 515.) das gegebene Parallelogramm ist, so verlängere man eine seiner Seiten, etwa **ab** und nehme irgend einen Punkt f auf dieser Verlängerung oder auch in der Seite **ab** selbst an, verlängere die **cd**, mache die Verlängerung **ce = cd** und ziehe **df** und **ef** oder **eg** und **dg**, es ist sodann

$$\triangle dge = \triangle dfe = abcd.$$

Beweis.

Weil **ce = cd**, so folgt aus dem Beweise des §. 529. die Richtigkeit dieser Auflösung.

§. 531.

Sollte das gesuchte Dreieck bei **d** (Fig. 515.) rechtwinklig werden, so mache man **df** normal auf **de**; ist aber verlangt, daß **gde** ein Winkel von bestimmter Größe seyn soll, so mache man **gde** diesem Winkel gleich und verfahre übrigens, so wie gelehrt wurde.

§. 532.

Aufgabe.

Jedes Rechteck, folglich auch, wegen §. 526., jedes Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Ist ein Parallelogramm gegeben, so verwandle man es zuvor in ein Rechteck (§. 526.). Mit dem Rechteck verfahre man nun also:

Die Verlängerung **be** der Seite **ab** (Fig. 516.) wird **= bc** gemacht, über **ae** ein Halbkreis **afe** beschrieben und in **b** auf der **ae** ein Loth **bf** errichtet, bis die Peripherie des Halbkreises **afe** in f getroffen wird.

Nimmt man nun die **bf**, so ist dies die Seite eines Quadrats, welches dem gegebenen Rechteck vollkommen gleich ist.

Beweis.

Es ist 1) **ab : bf = bf : be**,

und nach der Konstruction ist:

2) **be = bc**.

Kommt 2 nach 1, so erhält man

3) $ab : bf = bf : bc$; woraus

4) $\overline{bf}^2 = ab \times bc$ wird.

Nun ist aber

5) $ab \times bc = abcd$,

folglich muß wegen 5 und 4 seyn:

6) $\overline{bf}^2 = abcd$ oder

7) $bfgh = abcd$.

§. 533.

Aufgabe.

Jedes Quadrat abcd (Fig. 517.) in ein Rechteck von gegebener Länge m zu verwandeln.

Auflösung.

Es kommt hier nur darauf an, die Höhe des Rechtecks zu finden, welches dem Quadrat abcd gleich ist.

Man verlängere zu dem Ende eine Seite, etwa cd, des gegebenen Quadrats bis i, trage die Länge m von d nach e, ziehe ae und beschreibe aus d mit ad den Bogen agf. Zieht man nun fg und dann ga, so erhält man in der Verlängerung der cd den Punkt h und dadurch in dh die verlangte Höhe des Rechtecks.

Es ist nämlich:

$$dh \times m = abcd.$$

Beweis.

Nach der Konstruction ist ag, mithin auch ah senkrecht auf ae und daher steht:

1) $dh : ad = ad : de$, woraus

2) $dh \times de = \overline{ad}^2$ wird.

Nun ist

3) $\overline{ad}^2 = abcd$ und nach der Konstruction

4) $de = m$, folglich auch wegen 2, 3 und 4:

5) $dh \times m = abcd$.

§. 534.

Vorstehende Aufgabe kann auch auf folgende Art gelöst werden:

man verlängere eine Seite, etwa ad (Fig. 518.) des Quadrats, so weit, daß $de = m$ wird, ziehe die Diagonale

ec, verlängere sie, so wie die ab, cd und bc. Zieht man nun durch f die fh # ae und durch e die eh # af, so ist

cghi = abcd;

und in cghi ist gh = m, folglich cg die gesuchte Seite.

Beweis.

Weil cghi und abcd nach der Konstruction Ergänzungsparallelogramme sind, so sind sie einander gleich.

§. 535.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm, folglich auch jedes Rechteck in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Seite hat.

Auflösung.

Wenn abcd (Fig. 519.) das gegebene Parallelogramm und m die gegebene Seite ist, so verlängere man ad so weit, bis df = m wird und ziehe fc. Nun verlängere man die fc, ab, cd und bc, mache gi # af, fi # ag und es ist sodann chik das verlangte Parallelogramm, in welchem ch = df = m ist.

Beweis.

Es muß chik = abcd seyn, weil diese Figuren, wegen der Konstruction, Ergänzungsparallelogramme sind.

§. 536.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.

Auflösung.

Wenn abcd (Fig. 520.) das gegebene Parallelogramm, m die gegebene Seite und α der gegebene Winkel ist, so mache man edc = α, verlängere ed, bis dh = m ist, ziehe hc, verlängere sie, bis die Verlängerung von ab in i davon getroffen wird. Ferner verlängere man dc, mache fg, ferner ik # eh und ziehe hk # ei. Durch dies Verfahren erhält man das Parallelogramm cgkl, welches in cgk den Winkel α, in cg die Seite m hat und dem gegebenen Parallelogramm abcd = ist.

Beweis.

Wie die vorhergehenden Beweise.

§. 537.

Aufgabe.

Jedes Dreieck abo (Fig. 521.) in ein anderes eim zu verwandeln, welches eine gegebene Seite ei = m und einen gegebenen Winkel eim = α hat.

Auflösung.

Durch a lege man ah # bc, mache dbc = α, verlängere bd, bis bg = m wird, halbire bc in e, ziehe durch g und e die gh, mache if und hk # dg und die gk # bc. Wird nun km = ik gemacht und em gezogen, so ist △ eim = △ abc, eim = α und ei = m.

Beweis.

Weil 1) be = ½bc gemacht wurde, so ist
2) bdfe = △ abc. Da nun
3) eikl = bdfe, so folgt wegen 8 und 2:
4) eikl = △ abc.
Da nun 5) km = ik konstruirt ist, so muß
6) △ eim = eikl und folglich wegen 6 und 4
auch 7) △ eim = △ abc seyn.

Daß übrigens ei = m und eim = α ist, folgt aus der Konstruction.

§. 538.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 522.) in ein Parallelogramm eikl zu verwandeln, welches eine gegebene Seite m und einen gegebenen Winkel α hat.

Auflösung.

Durch a lege man ag # bc, halbire bc in e, mache dbc = α, verlängere bd, bis bm = m geworden ist, ziehe durch m und e die mg, mache fl, so wie die gk # dm, ferner mk # ag; so ist le = m, elk = α und eikl = △ abc.

Beweis.

Da 1) be = ce, so ist
2) bdfe = △ abc. Weil ferner
3) eikl = bdfe, so muß auch
4) eikl = △ abc seyn u. s. w.

§. 539.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 523.) in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, etwa ad in e, ziehe durch e die ei # ab, verlängere, sie bis ig = dem in a auf ab errichteten Lothe af wird und beschreibe über eg einen Halbkreis. Fällt man nun von i in der eg ein Loth ih bis an die Peripherie, so ist derselbe die Seite des Quadrats hikl, welches dem Paralleltrapez abcd gleich ist.

Beweis.

Es ist 1) $\frac{ab+cd}{2} \times af = abcd$ und

2) $ei = \frac{ab+cd}{2}$. Nun ist aber

3) ei : hi = hi : ig, woraus

4) $\overline{hi}^2 = ei \times ig$ wird.

Nach der Konstruction ist

5) ig = af, folglich, wenn 5 nach 4 kommt:

6) $\overline{hi}^2 = ei \times af$.

Setzt man nun 2 nach 6, so wird

7) $\overline{hi}^2 = \frac{ab+cd}{2} \times af$ und aus 7 wird

wegen 1:

8) $\overline{hi}^2 = abcd$ oder weil

ihkl = $\overline{hi}^2$ gemacht wurde:

9) $\overline{hi}^2 = abcd$.

§. 540.

Aufgabe.

Jedes Trapez abcd (Fig. 524.) zu quadriren.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonale bd, fälle auf sie von a und c die Perpendikel ae und cf, halbire bd in g, mache bh = cf, hi = ae und beschreibe über gi einen Halbkreis gki. Wird nun in b auf der di ein Loth errichtet und bis k an die Peripherie gezogen, so ist dies die Seite des Quadrats bklm, welches dem gegebenen Trapez abcd gleich ist.

Beweis.

Es ist 1) $abcd = \triangle abd + \triangle bcd$ oder

$$2)\ abcd = \frac{bd \times ae}{2} + \frac{bd \times cf}{2};$$

dies kann aber auch also dargestellt werden:

$$3)\ abcd = \tfrac{1}{2}\, bd\,(ae + cf).$$

Nun verhält sich

$$4)\ bg : bk = bk : bi,$$

und weil $5)\ bg = \tfrac{1}{2}\, bd$ und

$6)\ bi = cf + ae$ ist, so wird, wenn 5 und 6 nach 4 kommen:

$$7)\ \frac{bd}{2} : bk = bk : (cf + ae), \text{ woraus}$$

$$8)\ \overline{bk}^{2} : \tfrac{1}{2}\, bd\,(ae + cf) \text{ wird.}$$

Setzt man endlich 3 nach 8, so ergibt sich

$$9)\ \overline{bk}^{2} = abcd.$$

Und weil $bklm = \overline{bk}^{2}$ gemacht wurde, so ist auch endlich $10)\ bklm = abcd.$

§. 541.

Aufgabe.

Jedes reguläre Polygon zu quadriren.

Auflösung.

Es sey abcdefa (Fig. 525.) das gegebene reguläre Polygon, welches quadrirt werden soll.

Man verlängere eine seiner Seiten, etwa ef, und mache sie dem Perimeter gleich, das ist: man trage die Seite fe von f an so viel mal auf die fl, als das Polygon Seiten hat: hier also sechs mal, bei e, g, h, i, k und l, wodurch fl = 6 fe wird. Nun fälle man vom Mittelpunkte m des Polygons auf fe das Apothema mn, halbire es in o und setze on von l nach p. Wird nun zu fp ein Halbkreis beschrieben und von l auf fp das Loth lq gefällt, so ist dies die Seite des Quadrats lqsr, welches dem regulären Polygon abcdef gleich ist.

Beweis.

Es ist

1) abcdefa = △ efm + △ egm + △ ghm + △ him + △ imk + △ kml,

wenn man nämlich die Hilfslinie em, gm, hm, im, km und lm gezogen hat.

Setzt man nun in 1 statt den Theilen das Ganze, so wird

2) abcdefa = △ flm.

Nun ist aber

3) △ flm = $\frac{1}{2}$ mn × fl, oder weil

4) lp = $\frac{1}{2}$ mn gemacht ist:

5) △ flm = lp × fl.

Nach der Konstruction ist aber

6) fl : lq = lq : lp, woraus

7) $\overline{lq}^2$ = fl × lp, oder wenn 5 nach 7 gesetzt wird:

8) $\overline{lq}^2$ = △ flm hervorgeht.

Da nun aber △ flm = abcdefa nach 1 ist, so wird aus 8:

9) $\overline{lq}^2$ = abcdefa, und es ist daher auch das Quadrat lqsr, welches über lq beschrieben ist, dem gegebenen Polygon abcdefa gleich.

§. 542.

Aufgabe.

Jedes Rechteck, folglich jedes Parallelogramm in eine Raute zu verwandeln. §. 525. §. 526.

Auflösung.

Wenn abcd (Fig 526.) das gegebene Rechteck ist, so beschreibe man aus b mit ab einen Bogen und mache denselben so groß, bis er von der verlängerten cd in e berührt wird. Zieht man nun be und macht man af # be, so ist abef die verlangte Raute.

Beweis.

Da ab und be Radien sind, so ist auch

1) be = ab; und weil
2) af # be, so muß
3) ef = ab = be = af seyn; es ist daher abef ein Parallelogramm, dessen Seiten einander gleich sind, und folglich ist

abef eine Raute.

Da aber Parallelogramme von einerlei Grundlinie und gleicher Höhe einander gleich sind, so muß auch

4) abef = abcd seyn.

§. 543.

Aufgabe.

Jedes Trapez efgh (Fig. 527.) in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonale eg, fälle auf dieselbe von f und h die Lothe fi und hn, halbire diese Lothe in k und o und ziehe durch diese Halbirungspunkte die lm und pq parallel mit eg. Errichtet man nun in e und g auf der eg die Perpentikel lp und mq, so ist das Rechteck lmpq = efgh.

Beweis.

Weil 1) ik = $\frac{1}{2}$ if, so ist
2) egml = △ efg.

Weil ferner

3) no = $\frac{1}{2}$ hn, so ist
4) egqp = △ egh. Da nun
5) efgh = △ efg + △ egh, so wird, wenn 2 und 4 nach 5 kommen:
6) efgh = egml + egqp oder
7) efgh = lmqp.

§. 544.

Aufgabe.

Jede Figur von beliebiger Seitenanzahl in eine andere zuverwandeln, welche eine Seite weniger hat.

Auflösung.

Es ist **abcde** (Fig. 528.) die gegebene Figur von fünf Seiten. Man verbinde **a** mit **c** durch die **ac**, verlängere **ae** bis **g** und mache **bf** # **ac**. Wird nun **cf** gezogen, so ist **cdef** = **abcde** und **cdef** ist ein Viereck, mithin eine Figur, welche eine Seite weniger hat, als die **abcde**.

Beweis.

Weil **bf** # **ac** gemacht wurde, so ist

1) △ **acf** = △ **abc**.

Nun ist aber auch

2) **acde** = **acde**; folglich wenn 2 zu 1 kommt:

3) **acde** + △ **acf** = **acde** + △ **abc**,

oder wenn statt der Theile das Ganze gesetzt wird:

4) **cdef** = **abcde**.

Und da die Seiten **af** und **ae** der Konstruction nach nur eine gerade Linie bilden, so hat **cdef** auch eine Seite weniger, als **abcde**.

§. 545.

Dem vorigen §. zufolge kann jede ebene geradlinige Figur von noch so viel Seiten stets in eine solche Figur verwandelt werden, die eine Seite weniger hat. Setzt man dieses Verfahren nun so lange fort, bis man etwa auf ein Sechseck oder Fünfeck kommt, so kann man auch, wie leicht einzusehen ist, die Figur auf ein Dreieck bringen, das heißt, man kann jede geradlinige Figur in ein Dreieck und daher auch wegen §. 524. in ein Quadrat verwandeln.

§. 546.

Aufgabe.

Jedes Vieleck, es sey regulär oder unregelmäßig, in ein Quadrat zu verwandeln, oder jede geradlinige Figur zu quadriren.

Auflösung.

Man verwandle die Figur nach §. 544 in eine andere, die eine Seite weniger hat, als die gegebene Figur. Diese Procedur setze man so lange fort, bis man die Figur in ein Dreieck verwandelt hat. Wendet man nun bei diesem Dreieck die Konstruction des §. 524. an, so ist die Quadratur der gegebenen geradlinigen Figur vollzogen.

§. 547.

Das Verfahren, welches der §. 544 lehrt, findet auch dann statt, wenn die zu verwandelnde oder zu quadrirende Figur abcdefg (Fig. 529.) einwärts gehende Winkel hat.

Man ziehe nämlich zuerst ac, mache bh # ac, verlängere die ag, bis die bh in h getroffen wird und ziehe ch. Jetzt verbinde man h mit d durch die hd, mache ci # hd und ziehe di: es ist sodann

defgi = abcdefg.

Der Beweis
von diesem Verfahren ist §. 544 erhalten.

§. 548.

Aufgabe.

Die von einer Ellipse begrenzte Ebene in eine Kreisfläche zu verwandeln*).

Auflösung.

Wenn man die große Achse ab (Fig. 530.) der Ellipse so weit verlängert, bis be = cd wird, und man beschreibt über ae einen Halbkreis afe, so ist der in b auf ae errichtete Perpendikel bf der Durchmesser des der Ellipsenfläche gleichen Kreises.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) ab : bf = bf : be; oder weil
2) be = cd ist:

---

*) Die Architecten und Maschinenzeichner konstruiren meistens sogenannte Ovale, die bekanntlich aus vier Mittelpunkten beschrieben werden, da das Ellipsenzeichnen auf dem Papiere zu umständlich ist.

3) $ab : bf = bf : cd$,

folglich ist 4) $bf = \sqrt{ab \times cd}$ = dem Durchmesser des der Ellipsenfläche gleichen Kreises.

Nun ist aber die Kreisfläche

$F = \frac{1}{4} bf^2 \pi$; daher, wenn hierher der Werth aus 4 gebracht wird:

5) $F = \frac{\pi}{4} (\sqrt{ab \times cd})^2$ oder

6) $F = \frac{1}{4} ab \times cd \cdot \pi$.

Dies ist aber der Ausdruck für den Inhalt der Ellipsenfläche *) und demnach dargethan, daß die Konstruction richtig ist.

§. 549.

Aufgabe.

Eine Kreisfläche, deren Durchmesser **ab** (Fig. 531.) gegeben ist, in eine Ellipsenfläche zu verwandeln, deren eine Achse **a** man kennt.

Auflösung.

Man verlängere den Durchmesser **ab** des gegebenen Kreises so weit, bis $bc = a$ ist. Nun lege man **cf** unter einen beliebigen Winkel **acf** an die **ac**, mache $ce = ab$, ziehe **be** und lege durch **a** die **af** # **be**; es ist sodann **ef** die andere Achse der Ellipse, deren Flächeninhalt der Kreisfläche zu **ab** gleich ist.

Beweis.

Nach der Konstruction steht:

1) $bc : ab = ce : ef$, oder weil

2) $ce = ab$ gemacht wurde:

3) $bc : ab = ab : ef$; hieraus wird

4) $\overline{ab}^2 = bc \times ef$ und folglich ist auch

5) $ef = \frac{ab^2}{bc}$.

Wenn nun $bc = a$ gegeben ist, so muß die $ef = A$ seyn, und es wird daher, wenn man den gegebenen Durchmesser $ab = d$ setzt:

6) $A = \frac{d^2}{a}$ werden.

*) Arithmetisches Handbuch, §. 194.

Es ist aber der Inhalt einer Ellipsenfläche $F = \frac{1}{4} A a \pi$ *), oder wenn man hierein den Werth aus 6 trägt:

7) $F = \frac{d^2 a \pi}{4 a}$. Das ist

8) $F = \frac{d^2 \pi}{4}$.

Da nun aber $\frac{d^2 \pi}{4}$ der Inhalt der Kreisfläche zu dem Durchmesser d ist, so folgt, daß der in 6 enthaltene Werth der für die andere Achse A seyn muß und deshalb die Konstruction richtig ist **).

§. 550.

Aufgabe.

Jeden Kreis ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 191 enthält fünf verschiedene Methoden, diese Aufgabe für die Praktiker, die nicht viel Schärfe verlangen, zu lösen und wir wollen hier nur untersuchen, welche von den Methoden die richtigste ist.

Bei der ersten Auflösung ist (Fig. 200)

1) $ab = ef + \frac{2 \cdot ef}{8} = \frac{5 \cdot ef}{4}$, und daher

2) $bd = \sqrt{\left(\frac{5 \cdot ef}{4}\right)^2 + \left(\frac{5 \cdot ef}{4}\right)^2}$ oder

3) $bd = \frac{5 \cdot ef}{8} \sqrt{2}$.

Dies ist nun die Seite des Quadrats acbd und daher ist

4) dessen Inhalt $= \frac{50 \cdot \overline{ef}^2}{64} = \frac{25 \ \overline{ef}^2}{32}$.

Setzt man

5) $ef = 2$, so wird aus 4

6) der Inhalt von acbd $= \frac{25 \cdot 2^2}{32} = 3{,}125$

werden.

---

*) Arithmetisches Handbuch ꝛc. §. 194.
**) Andere Auflösung, Anhang, §. 714.

Nun ist aber

7) die Kreisfläche $= \frac{1}{4}\, ef^2\pi$ oder wegen 5:

8) die Kreisfläche $= \frac{2^2\pi}{4} = 3{,}14159\ldots\ldots;$

und es ergibt sich, wenn man den Werth aus 6 mit dem aus 8 vergleicht, daß das Quadrat **acbd** gegen die Kreisfläche zu klein ist und zwar um 0,016 .....

Bei der zweiten Auflösung ist, wenn man $ob = 1$ (Fig. 201) setzt und das Loth **on** von **o** auf **eg** zieht:

1) $og = \sqrt{on^2 + ng^2} = \sqrt{2}$, weil $on = ob = r$ ist, und folglich

2) $bg = \sqrt{2} - 1$, woraus

3) $bm = \frac{bg}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ wird.

Demnach ist

4) $om = ob + bm = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ woraus

5) $fm = \sqrt{om^2 + om^2} = \sqrt{2\,[\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{2})]^2} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}}$ wird.

Dies ist nun die Seite des Quadrats **fmlk** und es muß demnach

6) $fmlk = \left(\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ oder

7) $fmlk = 2{,}9142\ldots.$ seyn.

Nun ist aber

8) die Kreisfläche $= \overline{ob}^2\,\pi$ oder weil $ob = 1$ gesetzt wurde:

9) die Kreisfläche $= \pi = 3{,}14159,$

und es folgt daher aus 7 und 9, daß das durch diese Methode erhaltene Quadrat ebenfalls zu klein und noch kleiner, als das ist, welches durch die erste Auflösung erhalten wurde; die Differenz ist hier $= 0{,}1273\ldots.$

Was die dritte Auflösung anbelangt, so ist, weil der Durchmesser **ab** (Fig. 202) in dreiundzwanzig Theile getheilt wurde und der Radius **cg** dreizehn derselben enthielt,

1) $cd = \frac{2 \cdot 13 \cdot ab}{23} = \frac{26 \cdot ab}{23}$; und weil

2) $cf = cd : \sqrt{2}$, so wird, wenn 1 in 2 substituirt wird,

3) $cf = \frac{26 \cdot ab}{23} : \sqrt{2} = 0{,}7993\ldots\ ab$ werden.

Setzt man nun

4) $ab = 2$, so wird aus 3

5) $cf = 0{,}7993\ldots \times 2 = 1{,}5986\ldots$, folglich

6) $cedf = \overline{cf}^2 = 2{,}555\ldots$

also das erhaltene Quadrat noch kleiner werden, als das war, welches die zweite Auflösung gab: es ist nämlich hier die Differenz $= 0{,}586$.

Bei der vierten Auflösung ist wegen der Konstruction (Fig. 203.)

1) $ac : ce = ce : cd$, oder

2) $\frac{88}{28} ab : ce = ce : \frac{7\,ab}{28}$; woraus

3) $ce^2 = \frac{11\,\overline{ab}^2}{14}$ hervorgeht.

Setzt man hier

4) $ab = 2$, so erhält man

5) $ce^2 = \frac{11 \cdot 2^2}{14} = \frac{22}{7} = 3{,}14\cdot$,

und es ist einleuchtend, daß diese Konstruction auf das archimedische Verhältniß basirt ist und daß sie unter den hier beleuchteten Methoden die richtigste ist.

Nimmt man indeß die fünfte Auflösung zur Hand, welche durch Hilfe der Quadratrix vollzogen wurde, so wird, wenn ad (Fig. 210.) der Halbmesser des zu quadrirenden Kreises ist

1) $ab = \frac{1}{2} ad \cdot \pi$, weil bei der Quadratrix

$ad : ab = ab : \frac{ab\pi}{2}$ stattfindet, denn es verhält sich die Grundlinie der Quadratrix zum Halbmesser des um sie beschriebenen Viertelkreises, wie dieser Radius zum vierten Theile der mit diesem Radius beschriebenen Peripherie.

Wegen der Konstruction ist nun

2) $dg : dh = dh : de$ oder

3) $dg : dh = dh : ab$.

Bringt man den Werth aus 1 nach 3, so wird

4) $dg : dh = dh : \frac{1}{2} ad \cdot \pi$.

Und da 5) $dg = 2\,ad$ ist, so wird, wenn man

6) $ad = r$ setzt, aus 4

7) $2r : dh = dh : \frac{1}{2} r\pi$

werden, woraus man

8) $dh^2 = r^2\pi$ erhält.

Dies lehrt nun, daß mittels der Quadratrix des Dinostrat die Quadratur des Kreises mathematisch streng vollzogen werden könnte, wenn der Punkt, wo diese Kurve die **ab** schneidet, zu bestimmen wäre.

Es bleibt indeß unter allen Methoden, den Kreis zu quadriren, die mit Anwendung der gedachten Quadratrix die richtigste. (vid. Anmerkung zu §. 18.)

§. 551.

Aufgabe.

Eine Ellipse zu quadriren.

Auflösung.

Man verlängere die große Achse **ab** (Fig. 532.), bis **be = cd** wird; beschreibe über **ae** einen Halbkreis **afe** und errichte auf **ae** in **b** das Loth **bf**. Dies Loth ist nun der Durchmesser eines Kreises, welcher mit der Ellipsenfläche einerlei Inhalt hat. Verwandelt man nun diesen Kreis nach §. 189 in ein Quadrat, so ist die Aufgabe gelöst.

Man theile daher die **bf** in acht gleiche Theile, setze einen solchen Theil von **f** nach **g** und von **b** nach **h**, mache **ik = gh**, bringe diese Linien in ihrem Halbirungspunkte **l** unter einem rechten Winkel an einander und ziehe die Linien **hi**, **gi**, **gk** und **kh**: es ist sodann das Quadrat **gihk** = der Ellipsenfläche **achd**.

Beweis.

Daß **bf** der Durchmesser eines der Ellipsenfläche gleichen Kreises ist, wurde bereits §. 548 bewiesen, daher ꝛc.

§. 552.

Aufgabe.

Einen Halbkreis **abd** (Fig. 204.) in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 194 enthält sie.

Beweis.

Setzt man den Halbmesser **bc** des Halbkreises **abd** = **r**, so ist

1) die Halbkreisfläche $= \frac{1}{2} r^2 \pi$ *).

Nun ist 2) $bd = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$,
welches der Durchmesser des verlangten Kreises ist.

Nun ist 3) die Fläche des Kreises um $e = \frac{1}{4} \overline{bd}^2 \pi$ (Arithmetisches Handbuch, §. 163.), oder wenn 2 nach 3 kommt: 4) die Fläche des Kreises um $e = \frac{1}{4} \pi (r\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} r^2 \pi$.

Da nun der so eben erhaltene Ausdruck aus 4 dem in 1 vollkommen gleich ist, so folgt, daß die Konstruction richtig ist.

§. 552.

Aufgabe.

Einen Kreis in einen Halbkreis zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 195 enthält sie.

Beweis.

Setzt man bei Fig. 204. die $be = r$, so ist die Fläche des Kreises um $e = r^2 \pi$. (Ar. Handb. §. 161.); nun ist $bc^2 + bc^2 = 4r^2$, daher auch

$bc = r\sqrt{2}$, welches der Halbmesser des gesuchten Halbkreises ist; weshalb der

Inhalt dieses Halbkreises $= \frac{1}{2} (r\sqrt{2})^2 \pi = r^2 \pi$

wird. Da nun die halbe Kreisfläche so groß ist, wie die Fläche des Kreises um e, so ist die Richtigkeit der Konstruktion dargethan.

§. 553.

Aufgabe.

Eine Ringfläche in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 196 enthält sie.

Beweis.

Kann man darthun, daß ein mit dem Halbmesser bc (Fig. 205.) beschriebener Kreis dem Inhalte der Ringfläche

*) Arithmetisches Handbuch ꝛc. von Hampel. §. 161.

gleich ist, so hat man die Richtigkeit der Konstruction erwiesen.

Es sey $ac = R$ und $bc = r$, so ist, wenn F den Inhalt der Ringfläche bedeutet

1) $F = \pi (R + r) (R - r)$ *).

Nun ist wegen der Konstruction:

2) $ab : be = be : bd$, folglich

3) $be = \sqrt{ab \cdot bd}$.

Nun ist aber

4) $ab = R - r$ und

5) $bd = R + r$, folglich wird aus 3, wenn man die Werthe aus 4 und 5 substituirt:

6) $be = \sqrt{(R + r) (R - r)}$.

Da nun be der Halbmesser des gesuchten Kreises ist, so muß

7) die Fläche des Kreises um $b = \overline{be}^2 \pi$ seyn **).

Setzt man nun 6 nach 7, so wird

8) Fläche des Kreises um $b = (\sqrt{(R+r)(R-r)})^2 \pi$ oder $= \pi (R+r)(R-r)$ seyn.

Vergleicht man 1 mit 8, so findet man einerlei Werthe und es ist daher bewiesen, daß der mit be beschriebene Kreis der Ringfläche vollkommen gleich ist.

§. 554.

Wenn man eine Ringfläche, die nicht von concentrischen Kreisen begrenzt ist, in einen Kreis verwandeln will, so ziehe man die Centrallinie ab (Fig. 533.), mache $ad = bc$ und errichte in d auf der bd ein Loth de, welches dann der verlangte Halbmesser eines Kreises ist, dessen Fläche der gegebenen Ringfläche gleicht. Der Beweis ist derselbe, wie der zu §. 553.

§. 555.

Aufgabe.

Eine Ringfläche in einen Halbkreis zu verwandeln.

Auflösung.

Der §. 197 enthält sie.

---

*) Arithm. Handbuch, §. 167.

**) Ebendas., §. 161.

Beweis.

Setzt man (Fig. 206.) $ac = R$ und $bc = r$, so ist, wenn man ac bis g verlängert

1) $ab : bd = bd : bg$ oder

2) $(R - r) : bd = bd : (R + r)$, woraus

3) $\overline{bd}^2 = (R + r)(R - r)$

wird und es ist daher

4) die Ringfläche $= bd^2\pi$ oder wegen 3:

5) die Ringfläche $= \pi (R + r)(R - r)$.

Da ferner

6) $cd = \sqrt{\overline{bd}^2 + \overline{bd}^2} = \sqrt{2\overline{bd}^2} = bd\sqrt{2}$ ist,

so wird deshalb

7) die Halbkreisfläche $= \frac{1}{2}\overline{cd}^2\pi = \frac{1}{2}(bd\sqrt{2})^2\pi = \overline{bd}^2\pi$

werden, woraus man, wenn man den Werth aus 3 hier substituirt:

8) die Halbkreisfläche über $c = \pi(R+r)(R-r)$

erhält. Wird nun 4 mit 8 verglichen, so ergibt es sich, daß die Fläche des Halbkreises über ce der gegebenen Kreisfläche gleich und deshalb die Konstruction des §. 197 richtig ist.

§. 556.

Aufgabe.

Ein halbes Mondstück abd (Fig. 302.) in einen Halbkreis, oder auch in einen ganzen Kreis zu verwandeln.

Auflösung.

Der dem halben Mondstücke gleiche Halbkreis wird nach §. 298 gefunden.

Beweis.

Setzt man der Kürze wegen $ac = D$ und $bc = d$, so ist

1) die Fläche der halben Lunula $= \frac{1}{8}(D^2\pi - d^2\pi) =$

$$\frac{\pi}{8}(D + d)(D - d)\ ^*).$$

Nun ist

2) $\overline{eg}^2 = D^2 - d^2 = (D + d)(D - d)$, folglich

3) die Halbkreisfläche $ehg = \frac{\overline{eg}^2\pi}{8} = \frac{\pi^2}{8}(D+d)(D-d)$.

*) Arithm. Handb. §. 168.

Vergleicht man nun 1 mit 3, so findet man, daß die gefundene Halbkreisfläche, der halben Linie 1a gleicht und es ist daher bewiesen, was behauptet wurde *).

§. 557.

Aufgabe.

Einen Halbkreis ade (Fig. 534.) ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Im Mittelpunkte c errichte man auf ab das Loth cd, ziehe bd, theile diese Linie in acht gleiche Theile, mache df = be = einem solchen Theile; mache gh = ef, setze beide Linien in ihren Halbirungspunkten i unter einen rechten Winkel an einander und ziehe fg, ge, eh und fh; es ist sodann das Quadrat egfh dem Halbkreise abd gleich.

Beweis.

Weil nach §. 552. die bd der Halbmesser des dem Halbkreise abd gleichen Kreises ist, so durfte man nur zu diesem Durchmesser nach §. 189 das Quadrat konstruiren, ꝛc.

§. 558.

Aufgabe.

Eine Ringfläche ohngefähr in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Man errichte in b auf ac das Loth bd (Fig. 535.); dadurch ist der Durchmesser des dem Ringe gleichen Kreises gefunden (§. 553.), zu welchem man nach §. 189. das Quadrat fghi konstruirt, das dem Ringe ziemlich gleich ist.

Beweis.

Die Richtigkeit der Konstruction liegt in den Citaten der Auflösung.

§. 559.

Aufgabe.

Ein Quadrat abcd (Fig. 536.) ohngefähr in einen Halbkreis zu verwandeln.

---

*) Hätte das Mondstück in einen ganzen Kreis verwandelt werden sollen, so durfte man nur den so eben gefundenen Halbkreis nach §. 552 in einen Kreis verwandeln.

Auflösung.

Man bestimme nach §. 192. den Durchmesser ef, eines dem Quadrate abcd gleichen Kreises, ziehe eg # ab und fg # bc, verlängere fg, bis gh = fg wird und beschreibe aus g mit eg den Halbkreis feh: er ist der verlangte.

Beweis.

Die vorhergehenden Parapraphe enthalten den Beweis.

§. 560.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 537.) in ein Paralleltrapez bcih so zu verwandeln, daß die eine Dreieckseite bc, eine der beiden parallelen Seiten des Trapezes ist, daß ferner der Dreieckswinkel abc, welcher an dieser Seite liegt, der eine Winkel des Paralleltrapes werde und daß endlich der andere Winkel bcd des Paralleltrapezes, einem gegebenen Winkel m gleich werde.

Auflösung.

An c der Seite bc lege man den Winkel bcd = m, mache be # cd und durch a lege man die ad # bc. Beschreibt man nun über ad einen Halbkreis und errichtet man in e die ef normal auf ad, zieht man ferner df und beschreibt man damit aus d einen Bogen fg, so ist, wenn durch g die gh # cd gezogen wird, in der ab ein Punkt h bestimmt, durch welchen man hi # bc legen muß, um

$$bcih = \triangle abc$$

zu erhalten.

Beweis.

Wegen der Konstruction ist

1) $ad : df = df : de$.

Und weil 2) $df = dg$ gemacht wurde, so wird, wenn man 2 nach 1 setzt:

3) $ad : dg = dg : de$ werden.

Hieraus entspringt aber auch folgende Proportion:

4) $(ad - dg) : (dg - de) = dg : de$,

oder, wenn statt der Theile das Ganze gesetzt wird:

5) ag : eg = dg : de.

Weil ferner 6) hi = dg und

7) bc = de, so wird, wenn 6 und 7 nach 5 kommen:

8) ag : eg = hi : bc werden.

Da nun die Dreiecke agh und aeb ähnlich sind, so ist

9) ag : eg = ah : bh; und wenn 8 nach 9 kommt:

10) hi : bc = ah : bh.

Zieht man nun ch, so entstehen die Dreiecke hci und bch, welche, da sie zwischen Parallelen liegen, folglich einerlei Höhe haben, sich wie ihre Grundlinien verhalten, weshalb

11) △hci : △bch = hi : bc stattfindet.

Weil übrigens auch dasselbe bei den Dreiecken ach und bch statt findet, so ist

12) △ach : △bch = ah : bh.

Verbindet man endlich 10 und 12 mit einander, so erhält man

13) △ach : △bch = hi : bc und aus 11 und 13 folgt:

14) △ach : △bch = △hci : △bch,

woraus denn hervorgeht, daß

15) △ach = △hci ist.

Setzt man nun

16) △bch = △bch und addirt man 15 zu 16, so wird

17) △ach + △bch = △hci + △bch erhalten, woraus, wenn man statt der Theile das Ganze setzt:

18) △abc = bcih

erhalten wird.

Daß bci = m und bc sowohl dem Dreiecke abc, als auch dem Paralleltrapeze bcih gemeinschaftlich ist, geht aus der Konstruktion hervor.

§. 561.

Aufgabe.

Jede geradlinige Figur, von welcher Gestalt sie auch ist, in eine andere ebenfalls geradlinige Figur so zu verwandeln, daß sie dieser ähnlich werde.

Auflösung.

Es sey **K** (Fig. 538.) die gegebene zu verwandelnde Figur und **ABCDEF** diejenige Figur, welcher die neue ähnlich werden soll; ferner sey **pq** die Seite eines der **K** gleichen Quadrats (§. 546.) und **mn** ist die Seite des der Figur **ABCDEF** gleichen Quadrats.

Wären jedoch diese Seiten nicht gegeben, so müßte man beide Figuren in ein Quadrat verwandeln, wodurch dann die Seiten **pq** und **mn** erhalten würden.

Was nun die Konstruction selbst anbetrifft, so nehme man von der Figur **ABCDEF** eine Seite, etwa **AF** und mache auf dem Schenkel **hg**, des beliebig groß angenommenen Winkels **hgi**, die

gk = mn,
kt = pq,
gu = AF,

ziehe **ku** und lege durch **t**, die **tv # ku**. Trägt man nun die **uv** von **A** nach **f** auf die **AF** und zieht man von allen Polygonenwinkeln **CD** und **E** der gegebenen Figur nach **A** gerade Linien **CA, DA** und **EA**, so ist, wenn man durch **f** die

fe # FE, durch **e**
ed # ED, durch **d**
dc # DC und durch **c**
cb # CB

zieht, die Figur

Abcdef ∽ ABCDEF und es ist auch
Abcdef = K.

Beweis.

Daß die gefundene Figur mit der gegebenen ähnlich ist, geht daraus hervor, daß die Seiten **fe, ed, dc** und **cb #** sind mit den Seiten **FE, ED, DC** und **CB** und weil die Winkel **BAC, CAD, DAE** und **EAF** beider Figuren gemein sind. Nun ist noch nöthig darzuthun, daß **Abcdef = K** ist Man sage daher

1) $\overline{ABCDEF} : \overline{Abcdef} = \overline{AF}^2 : \overline{Af}^2$;

und nach der Konstruction steht

2) **mn : pq = AF : Af**

Quadirt man diese Proportion, so erhält man

3) $\overline{mn}^2 : \overline{pq}^2 = \overline{AF}^2 : \overline{Af}^2$.

Setzt man nun 3 nach 1, so ist

4) $ABCDEF : Abcdef = \overline{mn}^2 : \overline{pq}^2$.

Da nun 5) $\overline{mn}^2 = ABCDEF$ und

6) $\overline{pq}^2 = K$ ist, so muß wenn 5 und 6 nach 4 kommen

7) $ABCDGF : Abcdef = ABCDEF : K$

seyn, woraus

8) $Abcdef = K$

folgt; was zu beweisen war.

§. 562.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in ein solches bhk (Fig. 539.) zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreiecke abc ähnlich ist.

Auflösung.

Das gegebene Dreieck verwandle man in ein solches, welches mit dem Dreiecke abc einen gleichen Winkel abc hat; es sey dies das Dreieck bed. Man zieht nun df # ac, beschreibe über be einen Halbkreis, fälle aus f von der bc das Loth fg bis an die Peripherie, ziehe bg und beschreibe damit aus b den Bogen gh. Zieht man nun durch h die kh # ac, so ist das

$$\triangle bhk = \triangle bde \text{ und}$$
$$\triangle bhk \sim \triangle abc.$$

Beweis.

Weil die Dreiecke bdf und bhk einander ähnlich sind, so ist

1) $\triangle bhk : \triangle bdf = \overline{bh}^2 : \overline{bf}^2$;

da nun 2) $bg = bh$, so wird aus 1

3) $\triangle bhk : \triangle bdf = \overline{bg}^2 : \overline{bf}^2$.

Nach der Konstruction ist

4) $bf : bg = bg : be$, woraus

5) $\overline{bg}^2 = bf \times be$ wird.

Setzt man nun 5 nach 3, so erhält man

6) $\triangle bhk : \triangle bdf = bf \times be : \overline{bf}^2$ oder

7) △ bhk : △ bdf = be : bf.

Weil nun die Dreiecke bed und bfd einerlei Höhe haben, so wird

8) △ bed : △ bfd = be : bf.

Verbindet man endlich 7 mit 8, so erhält man:

9) △ bhk : △ bfd = △ bed : △ bfd oder

10) △ bhk = △ bed;

was bewiesen werden sollte.

§. 563.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 540.) in ein Parralleltrapez abgf zu verwandeln.

Auflösung.

Man verlängere die nicht parallelen Seiten ad und bc, bis sie sich im Punkte e treffen, lege durch c die ck # ab, beschreibe über ek einen Halbkreis ehk und errichte in d auf der ae ein Loth dh. Zieht man nun eh und beschreibt man damit aus e den Bogen hf, so bekommt man in der ae den Punkt f, durch welchen man fg # ab zieht, wodurch die Aufgabe gelöst ist, weil dann abgf = abcd ist.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) de : he = he : ek oder weil

2) ef = he ist, so wird

3) de : ef = ef : ek.

Ferner ist

4) ce : be = ek : ae.

Wird 3 mit 4 multiplicirt, so erhält man

5) ce × de : be × ef = ef : ae.

Multiplicirt man das dritte und vierte Glied dieser Proportion mit ef, so ist

6) ce × de : be × ef = $\overline{ef}^2$: ae × ef;

werden die mittlern Glieder verwechselt, so ist

7) ce × de : $\overline{ef}^2$ = be × ef : ae × ef oder

8) ce × de : ef = be : ae.

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke efg und abe folgt:

9) be : ae = eg : ef; und wenn man 8 mit 9 verbindet so ist

10) ce × de : $\overline{ef}^2$ = eg : ef.

Wird in 10 das dritte und vierte Glied mit ef multiplicirt, so ergibt sich

11) ce × de : $\overline{ef}^2$ = ef × eg : $\overline{ef}^2$; hieraus aber folgt:

12) ce × de = ef × eg.

Wenn diese Gleichung in eine Proportion verwandelt wird, so steht:

13) ce : ef = eg : de.

Findet aber bei zwei Dreiecken cde und efg, in denen ein Winkel ced = feg ist, die Proportion aus 13 statt, so sind die Dreiecke einander gleich und folglich ist:

14) △cde = △efg.

Da nun

15) egid = egid, so muß, wenn 14 von 15 weggenommen wird,

16) egid — △cde = egid — △efg das ist

17) △icg = △dfi

bleiben; und da auch

18) abcif = abcif ist, so wird, wenn man 17 zu 18 addirt

19) abcif + △icg = abcif + △dfi oder

20) abgf = abcd erhalten werden.

§. 564.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere Rechtecke, Quadrate oder Dreiecke in ein Rechteck, Quadrat oder Dreieck zu verwandeln.

Auflösung.

Die Rechtecke, so wie die Dreiecke, verwandle man nach §. 532. und §. 524. in Quadrate und konstruire dann nach §. 322., §. 533. und §. 528.

Beweis.

Weil de (Fig. 319.) die Seite des Quadrats a und ef die Seite des Quadrats b ist, so muß

1) df = $\sqrt{a + b}$,

das heißt: df muß die Seite eines Quadrats seyn, welches so groß ist, wie a und b zusammengenommen. Nun ist aber auch dg der Seite des Quadrats c gleich gemacht werden, folglich muß auch

2) $\overline{fg}^2 = \overline{df}^2 + c$ oder wegen 1

3) $\overline{fg}^2 = (\sqrt{a + b})^2 + c$, nämlich

4) $\overline{fg}^2 = a + b + c$ seyn. Und weil dfih $= \overline{fg}^2$ ist, so muß aus 4 auch

5) dfih $= a + b + c$ werden.

§. 565.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches dem Unterschiede zweier Figuren gleich ist.

Auflösung.

Man quadrire die gegebenen Figuren nach §. 546. und verfahre dann nach §. 321.

Beweis.

Weil bei Fig. 318.

$\overline{ae}^2 = \overline{bc}^2 - ab^2$, so ist ꝛc.

§. 566.

Aufgabe.

Mehrere Kreise in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung.

Man verfahre mit dem Durchmesser der Kreise eben so, wie man §. 322. mit den Seiten der Quadrate verfuhr und beschreibe dann aus dem Halbirungspunkte der zuletzt erhaltenen Hypothenuse mit der halben Hypothenuse einen Kreis, welcher die Summe der gegebenen Kreise ist. §. 324.

Beweis.

Wie §. 564.

§. 567.

Aufgabe.

Einen Kreis zu konstruiren, der dem Unterschiede zweier Kreise gleich ist.

Auflösung.

Man betrachte die Durchmesser der gegebenen Kreise als Quadratseiten und verfahre damit so, wie §. 321 verfahren wurde: die dadurch erhaltene Kathete ist der Durchmesser des verlangten Kreises §. 324.

Beweis.

Wie §. 365.

§. 568.

Aufgabe.

Ein Trapez in ein Rechteck, wozu eine Seite gegeben ist, zu verwandeln.

Auflösung.

Auf ab # cd (Fig. 541.) errichte man in einem beliebigen Punkte y ein Loth yz und mache es so lang, als die gegebene Rechtecksseite. Nun halbire man bc in α und lege duch α die αβ # ab, mache rs # ab, fälle von α und β auf rs die Lothe βδ und αγ, ziehe δy und γy, wodurch in cd die Punkte t und u erhalten werden. Zieht man nun durch diese Punkte die Linien mn und kl # yz, so ist

$$klnm = abcd.$$

Beweis.

Es ist 1) Trapez $abcd = \frac{ab + cd}{2} \times yv.$

(Arithm. Handb. §. 123.). Nun ist aber

2) $\alpha\beta = \frac{ab + cd}{2}$, daher wird

3) $abcd = \alpha\beta \times yv.$

In dem Dreiecke δyγ ist

4) yv : tu = yz : γδ oder

5) yv × γδ = tu × yz.

Weil ferner

6) tu × yz = klnm ist, so muß auch, wenn 6 nach 5 kommt:

7) yv × γδ = klnm seyn.

Da nun

8) αβ = γδ ist, so wird aus 7

9) αβ × yv = klnm werden, und wenn endlich 9 in 3 substituirt wird, so ist:

10) abcd = klnm.

§. 569.

Aufgabe.

Das Polygon **ABCDEFIKLA** (Fig. 542.) in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Höhe längs einer beliebigen Seite **FI** der Figur fällt, dessen Grundlinie aber einer senkrechten Linie **Az**, die aus einem beliebigen Winkel **A** der Figur auf **IF** gefällt wird, gleich ist.

Auflösung.

Man verlängere die **FI** unbestimmt auf beiden Seiten und halbire die Seiten **AB**, **BC**, **DE**, **EF** in α, β, γ, δ und ε. Von **B**, **C**, **D** und **E** fälle man auf **Az** die Perpendikel **Bb**, **Cc**, **Dd** und **Ee**. Aus α, β, γ, δ und ε ziehe man mit **Az** Parallelen und markire ihre Durchschnitte in der Linie **zf** und in deren Verlängerung **Fr**; sie — diese Parallelen — würden, wenn man sie wirklich zöge, $\alpha 1$, $\beta 2$, $\gamma 3$, $\delta 4$ und $\varepsilon 5$ seyn. An **A** und an 1 lege man nun ein Lineal und ziehe eine Linie von **A** bis **m** an das erste Loth **Bb**; dann ziehe man **A2** und mache **mn** # **A2**. Eben so ziehe man **A3** und mache **no** # **A3** u. s. f., so wird endlich die durch **p** mit **A5** gezogene Parallele den letzten Perpendikel in **q** schneiden und **zq** ist dann die Höhe eines Rechtecks **AzqQ**, welches = **ABCDEFzA** ist.

Verfährt man mit der andern Hälfte der gegebenen Figur eben so, so ist **AMNz** = **ALKIz**.

Beweis.

Weil 1) $\triangle ABb = \frac{AB \times Bb}{2}$, und weil

2) $Az : \frac{Bb}{2} = Ab : bm$, so ist auch

3) $Az \times bm = \frac{Ab \times Bb}{2}$, und folglich

wegen 1 und 3:

4) $\triangle ABb = Az \times bm$.

Man ziehe **bv** # **mn** # **A2**, so ist

5) **Az** : **z2** = **bc** : **cv**, folglich auch

6) **Az** × **cv** = **z2** × **bc**. Da nun aber

7) $BCcb = \frac{Bb + Cc}{2} \times bc$ und

8) $z2 = \frac{Bb + Cc}{2}$, so wird auch

9) $BCd = z2 \times bc$, wenn nämlich 8 nach 7 gesetzt wurde. Weil ferner

10) $nv = bm$, so ist

11) $Az \cdot nv = Az \cdot bm$, und wenn 4 nach 11 kommt:

12) $Az \times nv = \triangle ABb$; folglich

13) $Az \times vn + Az \times cv = \triangle ABb + + Az \times cv$.

Aus 13 aber wird wegen 6:

14) $Az(cv + vn) = z2 \times bc + \triangle ABb$, und wegen 9 erhält man aus 14

15) $Az(cv + vn) = BCcb + \triangle ABb$, und wegen 16) $cv + vn = cn$ wird aus 15

17) $Az \times cn = BCcb + \triangle ABb$.

Zieht man nun durch c mit no eine Parallele, so folgt

18) $Az \cdot do = \triangle ABb + BCcb + CDcb$, und fährt man fort, ähnliche Parallelen zu ziehen, so erhält man endlich

19) $Az \cdot zq = \triangle ABb + BCcb + CDdc \cdots + EFze$, das heißt es ist

20) $AQqz = ABCDEFz$.

Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis für die untere Hälfte der Figur geführt und es ist demnach:

21) $MNqQ = ABCDEFIKL$.

§. 570.

Das im vorigen §. gezeigte Verfahren findet auch dann statt, wenn die Figur auswärts gehende Winkel hat. Auch kann es zuweilen vorkommen, daß ein aus B auf Az gefällter Perpendikel durch A geht und in diesem Falle wird $Ab = o$ (Fig. 542.). Wird übrigens $qr = zq$, und zieht man Ar, macht man ferner $NS = Nz$ und zieht man As, so wird

$ABCDEFIKLA = \triangle Ars$ werden.

§. 571.

Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Inhalt einer Kugelfläche gleich ist.

Auflösung.

Man nehme den Kugeldurchmesser zum Halbmesser des gesuchten Kreises. Wenn ab (Fig. 543.) der Kugeldurchmesser ist und man beschreibt damit aus b einen Kreis adce, so ist dessen Fläche dem Mantel der Kugel gleich.

Beweis.

Wenn $ab = d$, so ist

1) die Kugelfläche $= d^2\pi$ (Arithm. Handb. §. 321.).

Nun ist der Kreisdurchmesser $ac = 2d$ und

2) dessen Fläche $= \frac{(2d)^2\pi}{4} = d^2\pi$ (Arith. Handb. §. 163.), folglich wegen der Gleichheit der Werthe aus 1 und 2 das Verfahren richtig.

§. 572.

Aufgabe.

Einen Halbkreis in eine Ellipse, deren eine Achse gegeben ist, zu verwandeln.

Auflösung.

Wenn adb (Fig. 544.) den Halbkreis und bf die eine Achse der Ellipse ist, in welche der Halbkreis verwandelt werden soll, so kommt es nur darauf an, die andere Achse zu bestimmen.

Zu dem Ende errichte man den Halbmesser cd lothrecht auf dem Diameter ab, ziehe bd, trage die gegebene Achse von b bis f, mache $be = bd$ und ziehe ef.

Wird nun der Durchmesser ab verlängert und dg # ef gemacht, so ist bg die gesuchte Achse der Ellipse.

Beweis.

Es sey 1) $bf = a$ und

2) $bg = A$.

Nun ist, wenn $bc = r$ gesetzt wird,

3) $bd = r\sqrt{2}$ und der Konstruction wegen:

4) $bf : bd = be : bg$, oder wegen 1, 2, 3 und 4 5) $a : r\sqrt{2} = r\sqrt{2} : A$,

woraus 6) $A = \frac{2r^2}{a}$ wird.

Da nun 7) die Ellipsenfläche $= \frac{aA\pi}{4}$ (Arithm. Handb. §. 194.) ist, oder wenn 6 nach 7 kommt:

8) diese Fläche $= a \cdot \frac{2r^2}{a} \frac{\pi}{4} = \frac{r^2 \pi}{2}$

wird, so muß, wenn die Konstruction richtig ist, auch die Fläche des gegebenen Halbkreises eben so groß seyn. Da nun 9) die Halbkreisfläche $= \frac{1}{2} bc \cdot \pi = \frac{1}{2} r^2 \pi$ (Arithm. Handb. §. 161), nämlich eben so groß ist, wie die Ellipsenfläche, weil die Werthe aus 8 und 9 einander gleich sind, so ist bewiesen, was behauptet wurde.

§. 573.

Aufgabe.

Aus der Seite ab (Fig. 545.) eines Quadrats A die Seite eines dem Quadrate gleichen gleichseitigen Dreiecks zu finden, oder ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Auflösung.

Man mache $ad = ab$, beschreibe über db einen Halbkreis, errichte in dem Halbirungspunkte c der ad auf ad das Loth ce, mache $cf = ac$, beschreibe über ef auch einen Halbkreis und verlängere ba so weit, bis $gh = ab$ wird. Trägt man nun auch ab von c nach i, zieht man gi und hk ∥ gi, so ist, wenn ce bis k verlängert wird, ik die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks, welches so groß ist wie das Quadrat A.

Beweis.

Wegen der Konstruktion steht

1) $bc : ce = ce : cd$, oder wenn $ab = a$ gesetzt wird:

2) $\left(a + \frac{a}{2}\right) : ce = ce : \frac{a}{2}$, woraus

3) $ce = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ wird.

Ferner ist

4) $ce : cg = cg : cf$, oder wegen 3 und wegen der Konstruction:

5) $\frac{a}{2}\sqrt{3} : cg = cg : \frac{a}{2}$, woraus man

6) $cg = \frac{a}{2}\sqrt[4]{3}$ erhält.

Nun ist ferner wegen der Auflösung:

7) cg : gh = ci : ik, oder

8) $\frac{a}{2}\sqrt[4]{3} : a = a : ik$, woraus sich

9) $ik = \frac{2a}{3}\sqrt[4]{27}$ ergibt.

Da man nun die Seite des gleichseitigen Dreiecks kennt, so kann man (nach §. 158. Arithm. Handb.) den Flächeninhalt F dieses Dreiecks bestimmen; es ist nämlich

10) $F = \left[\left(\frac{2a}{3}\sqrt[4]{27}\right)^2\sqrt{3}\right] : 4$ oder

11) $F = a^2$.

Und weil die Quadratseite auch a ist, so muß der Inhalt des Quadrats $= a^2$ seyn, und es ist daher, weil der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks nach 11 auch $= a^2$ gefunden wurde, die Konstruktion vollkommen richtig.

§. 574.

Aufgabe.

Ein Quadrat in ein reguläres Sechseck zu verwandeln.

Auflösung.

Wenn ab (Fig. 546.) die gegebene Quadratseite ist, so verlängere man sie, bis $ad = 6\frac{3}{4}\,ab$ wird, mache $de = ab$, beschreibe über ae einen Halbkreis, errichte in d auf ae das Loth df, mache $dg = ab$, beschreibe über fg auch einen Halbkreis und verlängere ae bis h an die Peripherie des Halbkreises. Nun trage man ab von h bis i, mache $dk = ab$ und ziehe kh. Wird endlich il # hk gemacht, so ist kl die Seite des dem Quadrate gleichen Sechsecks.

Beweis.

Man setze der Kürze wegen $ab = a$.

Nach der Konstruction ist

1) ad : df = df : de, und weil

2) $ad = 6\frac{3}{4}\,a = \frac{27}{4}\,a$ und

$de = hi = dg = a$ ist, so wird aus 1, wenn man die Werthe aus 2 anwendet

3) $\frac{27a}{4} : df = df : a$, woraus man

4) $df = \frac{3a}{2}\sqrt{3}$ erhält.

Ferner ist auch wegen der Konstruction:

5) $df : dh = dh : dg$, oder wegen 4 und 2:

6) $\frac{3a}{2}\sqrt{3} : dh = dh : a$; dies gibt:

7) $dh = a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$.

Ebenfalls ist wegen der Auflösung:

8) $dh : hi = dk : kl$, oder wegen 7 und 2, und weil $dk = a$ gemacht wurde:

9) $a\sqrt[4]{\frac{27}{4}} : a = a : kl$, woraus man

10) $kl = \frac{a}{3}\sqrt[4]{12}$ für die Seite des regulären Sechsecks oder für den Halbmesser des Kreises um das Sechseck findet.

Ist nun vorstehendes Resultat ein richtiges, so muß, wenn man den Flächeninhalt des Sechsecks zur gegebenen Seite a ermittelt, dieser dem des gegebenen Quadrats gleich seyn.

Nun ist die Höhe eines der sechs Dreiecke, in welche das Sechseck durch Radien, die an die Polygonwinkel gezogen werden, zerlegt seyn kann, nämlich

$h = \frac{a}{6}\sqrt[4]{108}$ (Arithm. Handb. §. 129.), folglich der Inhalt eines Dreiecks

$$= \left(\frac{a}{6}\sqrt[4]{108} \times \frac{a}{3}\sqrt[4]{12}\right) : 2 \text{ oder}$$

$$= \frac{a^2}{6},$$

und daher ist

11) der Inhalt des Sechsecks $= \frac{6a^2}{6} = a^2$.

Da nun der Inhalt des Sechsecks dem des gegebenen Quadrats gleich ist, so folgt, daß vorstehende Konstruction vollkommen richtig ist.

§. 575.

Aufgabe.

Ein Quadrat in ein reguläres Achteck zu verwandeln.

Auflösung.

Man darf nur den Halbmesser des Kreises bestimmen, in welchen ein Achteck gezeichnet werden kann, dessen Inhalt dem des gegebenen Quadrats gleich ist.

Es sey ab (Fig. 547.) die Seite des gegebenen Quadrats. Man mache $cd = 8ab$, $de = ab = a$, beschreibe über ce einen Halbkreis und errichte in d auf ce das Loth df. Nun verlängere man df bis $dg = ab$ wird und beschreibe über fg einen Halbkreis fhg. An h lege man unter einem beliebigen Winkel ehl die hl, mache $hi = ab$ und ziehe di. Wird nun $ek \# di$ gemacht, so erhält man ik, welches der Radius eines Kreises ist, in welchen man ein reguläres Achteck legen kann, dessen Flächeninhalt dem des gegebenen Quadrats über ab gleich ist.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) $cd : df = df : de$

oder wenn man die Seite $ab = a$ setzt:

2) $8a : df = df : a$, woraus

3) $df = 2a\sqrt{2}$ wird.

Ferner ist ebenfalls wegen der Konstruction:

4) $dg : dh = dh : df$ oder

5) $a : dh = dh : 2a\sqrt{2}$, woraus

6) $dh = a\sqrt[4]{8}$.

Endlich ist, wieder nach vorstehenden Gründen:

7) $dh : de = hi : ik$, oder

8) $a\sqrt[4]{8} : a = a : ik$, woraus

9) $ik = a\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ kommt, welches der gesuchte Halbmesser ist.

Nun ist die Seite des regulären Achtecks, wenn r der Radius des umschriebenen Kreises ist, $= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ und das Apothema ist $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, und daher muß der

Inhalt des Achtecks $= 8 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \times r\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$
$: 2 = 2r^2\sqrt{2}$ *)

seyn. Setzt man nun hier statt r den Werth aus q, so bekommt man den Flächeninhalt des Achtecks

$$= 2\sqrt{2}\left(a\sqrt[4]{\tfrac{1}{8}}\right)^2 = a^2.$$

Da nun der Inhalt des Quadrats auch $= a^2$ ist, so folgt, daß die Konstruction richtig ist.

§. 576.

Aufgabe.

Ein Quadrat in ein reguläres Fünfeck zu verwandeln, oder vielmehr den Halbmesser des um ein Fünfeck zu beschreibenden Kreises zu finden, dessen Flächeninhalt dem des gegebenen Quadrats gleich ist.

Auflösung.

Man mache **cd** $= 5a$ (Fig. 548.) (wenn nämlich die gegebene Seite **ab** des Quadrats gleich a gesetzt wird), ferner **de** $= a$, beschreibe über **ce** einen Halbkreis, errichte in **d** auf **ce** das Loth **df**, verlängere es, bis **fh** $=$ **cd** $= 5a$ geworden, mache **dg** $=$ **de** und beschreibe über **gh** den Halbkreis **gih**. Nun mache man **dk** $=$ **5di** und **kl** $= a$, beschreibe unter **dl** einen Halbkreis, fälle von **k** auf **dl** das Loth **km** an den Halbkreis, trage **kl** von **l** nach **n** und von **n** nach **o**, beschreibe über **ok** einen Halbkreis, fälle an denselben von **n** auf **ok** den Perpendikel **np**, mache **pu** $= a$, beschreibe über **nu** einen Halbkreis, errichte in **p** auf **nu** das Loth **pv** und setze dasselbe von **m** nach **q**. Macht man endlich **kr** $=$ **2a** (auf der von **k** aus beliebig gezogenen Linie **kt**) und zieht man **mr**, so ist, wenn man durch **q** die **qs** # **mr** zieht, **rs** der verlangte Halbmesser.

Ein mit diesem Radius beschriebener Kreis enthält allemal ein reguläres Fünfeck, welches dem gegebenen Quadrate gleich ist.

Beweis.

Wegen der Konstruction ist

---

*) Arithmet. Handbuch §. 227.

1) $cd : df = df : de$ oder
2) $5a : df = df : a$, woraus
3) $df = a\sqrt{5}$ erhalten wird.

Ferner steht

4) $hd : di = di : dg$ oder
5) $(hf + df) : di = di : dg$, oder wegen der Konstruction und wegen 3:
6) $(5a + a\sqrt{5}) : di = di : a$, woraus
7) $di = a\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ folgt.

Wiederum ist

8) $dk : km = km : kl$, oder weil wegen 7 und wegen der Konstruction
9) $dk = 5di = 5a\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ ist:
10) $(5a\sqrt{5 + \sqrt{5}}) : km = km : a$, woraus
11) $km = a\sqrt[4]{125 + 25\sqrt{5}}$ wird.

Nun ist

12) $kn : np = np : no$ oder
13) $2a : np = np : a$, woraus man
14) $np = a\sqrt{2}$ erhält.

Auch steht

15) $np : pv = pv : pu$, oder weil $pu = a$ gemacht ist und wegen 14:
16) $a\sqrt{2} : pv = pv : a$, woraus man
17) $pv = a\sqrt[4]{2}$ bekommt.

Endlich ist

18) $km : mq = kr : rs$, oder wegen 11, und weil
19) $mq = pv = a\sqrt[4]{2}$, und
20) $kr = 2a$ gemacht wurde:
21) $a\sqrt[4]{125 + 25\sqrt{5}} : a\sqrt[4]{2} = 2a : rs$, woraus man
22) $rs = 2a\sqrt[4]{\frac{5 - \sqrt{5}}{250}}$ findet, welches der Halbmesser des um das verlangte Fünfeck zu beschreibenden Kreises ist. Setzt man nun der Bequemlichkeit wegen

$$rs = r$$

und erwägt man, daß der Flächeninhalt eines regulären in den Kreis vom Radius r beschriebenen

$$\text{Fünfecks} = \frac{5r}{8}\sqrt[2]{10 + 2\sqrt{5}}$$ *)

ist, so muß, wenn man hierein den Werth für r aus 22 setzt, der Inhalt des regulären Fünfecks $= a^2$ werden, wenn die Konstruction richtig ist. Da nun

$$\frac{5}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\left(2a\sqrt[4]{\frac{5-\sqrt{5}}{250}}\right)^2 = a^2$$ ist, so ist die Richtigkeit der Konstruction dargethan.

§. 577.

Es könnten noch mehrere Aufgaben: Quadrate in Polygone durch Konstruktion zu verwandeln, gegeben werden; da indeß jeder Geometer, welcher im Stande ist, analytische Ausdrücke zu konstruiren, diese Konstruction leicht finden kann, so sind diese Aufgaben hier weggelassen worden, und es wird nun gezeigt werden, wie man die zu konstruirenden analytischen Ausdrücke bildet.

Man nehme den Halbmesser r irgend eines Kreises und berechne hierzu den Flächeninhalt desjenigen Polygons, in welches irgend ein Quadrat verwandelt werden soll.

Aus diesem Ausdrucke (für den Flächeninhalt des Polygons) ziehe man nun die Wurzel: sie ist die Seite des dem Quadrate gleichen Vielecks. Dieser Ausdruck für die Seite, welcher eine Gleichung ist, wird nun in eine Proportion verwandelt, in welcher man den Radius zum vierten Gliede macht. Nun sucht man zu den gegebenen drei Gliedern nach §. 203. die vierte Proportionallinie: sie ist der verlangte Halbmesser.

Wie man Linien addirt oder von einander subtrahirt, ist bekannt, und wie man Proportionallinien findet, zeigt die neunte Abtheilung. Hat man Brüche zu konstruiren, so muß in dem Zähler, und zwar in jedem seiner Theile, ein Faktor (eine Dimension) mehr als in dem Nenner oder in jedem seiner Theile enthalten seyn. Ferner müssen alle Theile des Zählers aus gleich viel Faktoren bestehen, das heißt sie müssen homogen seyn. Im Fall dieses nicht stattfindet, so muß man da, wo die Faktoren fehlen, die Einheit setzen, nämlich eine willkürliche Größe als Einheit

*) Arithmetisches Handbuch, §. 237.

nehmen und sie an die Stelle der fehlenden Faktoren bringen, wenn der Ausdruck durch eine Linie = x ausgedrückt werden soll.

§. 578.

Eine gegebene geradlinige Figur in eine andere zu verwandeln, welche 2, 3, 4 . . . . . nmal größer ist als die gegebene; dies geschieht dadurch, daß man eine Seite der gegebenen Figur zu den Katheten eines gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecks macht und die Hypothenuse zieht: sie ist die Seite einer der gegebenen ähnlichen Figur, welche noch einmal so groß als diese ist. Soll die Figur aber dreimal größer werden, so nehme man die eben gefundene Hypothenuse, mache sie zur Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die eine Seite der gegebenen Figur ist, und ziehe die Hypothenuse: sie ist die Seite einer Figur, welche dreimal größer als die gegebene ist. Auf ähnliche Weise kann man fortfahren und die Hypothenusen zu Seiten solcher Figuren finden, die 4, 5 . . . . . nmal größer sind, als die gegebene Figur ist.

Soll z. B. eine geradlinige Figur entworfen werden, die viermal größer als **abcde** (Fig. 550.) seyn soll, so nehme man irgend eine Seite **cd**, setze an sie nach **c** das Loth **ce = cd** und ziehe **de**; ferner setze man auf **cd** an **c** den Perpendikel **ef = cd** und ziehe **df**; und wenn man in **f** auf **df** die Normale **fg = cd** errichtet und **dg** zieht, so ist **dg** die mit **cd** homologe Seite einer Figur, welche viermal so groß als **abcde** ist.

Die Richtigkeit dieser Konstruction geht aus Folgendem hervor: es ist nämlich

1) $\overline{de}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{ce}^2$, oder weil
2) $ce = cd$ ist, so ist auch
3) $\overline{de}^2 = 2\,\overline{cd}^2$. Ferner ist auch
4) $\overline{df}^2 = \overline{de}^2 + \overline{ef}^2$, oder weil
5) $ef = cd$ ist und wegen 3:
6) $\overline{df}^2 = 2\,\overline{cd}^2 + \overline{cd}^2$, das ist
7) $\overline{df}^2 = 3\,\overline{cd}^2$. Und weil

8) $\overline{dg}^2 = \overline{df}^2 + fg^2$, so muß wegen
9) $fg = cd$ und wegen 7 auch
10) $\overline{dg}^2 = 3\overline{cd}^2 + \overline{cd}^2$ oder
11) $\overline{dg}^2 = 4\overline{cd}^2$ seyn.

Konstruirt man nun über dg ein Quadrat, so ist dessen Inhalt viermal so groß, als der des Quadrats über cd.

Bei krummlinigen Figuren wird eben so, wie hier an der geradlinigen Figur demonstrirt wurde, verfahren; man nimmt indeß dann deren Durchmesser oder Achsen, um damit, so wie hier mit cd geschah, zu operiren.

§. 579.

Aufgabe.

Zu untersuchen, wie viel mal eine Figur efgh (Fig. 551.) in einer andern ihr ähnlichen Figur abcd enthalten ist.

Auflösung.

Von der größern Figur abcd nehme man eine Seite, z. B. ab und trage sie vom Scheitel i eines Winkels lin, der eine beliebige Größe haben kann, auf einen seiner Schenkel von i nach k; nehme von der andern kleinern Figur efgh die mit ab ähnlich liegende Seite ef und trage sie von k nach l und von i nach m, ziehe km und mache ln ∥ kn. Untersucht man nun, wie oft die Linie mn in der Seite ab enthalten ist — welches am leichtesten mittels eines tausendtheiligen Maasstabs geschehen kann — so zeigt der Quotient an, der wie vielste Theil efgh von abcd ist.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) $ab : ef = ef : mn$, woraus
2) $\overline{ef}^2 = ab \times mn$ folgt.

Der Aehnlichkeit der Figuren abcd und efgh wegen steht

3) $abcd : efgh = \overline{ab}^2 : mn^2$ und weil, wenn man 1 quadrirt
4) $\overline{ab}^2 : \overline{ef}^2 = \overline{ef}^2 : \overline{mn}^2$ ist, so muß, wenn 4 mit 3 verbunden wird,

5) $abcd : efgh = \overline{ef}^2 : \overline{mn}^2$ werden.

Wird endlich 2 in 5 substituirt, so ist

6) $abcd : efgh = ab \times mn : \overline{mn}^2$ oder

7) $abcd : efgh = ab : mn$, das ist

8) $\frac{abcd}{efgh} = \frac{ab}{mn}$;

d. h.: um zu untersuchen, wie viel mal **efgh** in **abcd** enthalten ist, darf man nur ermitteln, wie viel mal die durch die Konstruction erhaltene Linie **mn** in der Seite **ab** enthalten ist.

§. 580.

Sollen Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme 2, 3, 4... nmal größer gemacht werden, ohne daß die neue Figur der gegebenen ähnlich seyn darf, so nehme man die Grundlinien dieser Figuren 2, 3, 4... nmal und konstruire darüber ein Dreieck, ein Rechteck oder ein Parallelogramm, welches eine mit der gegebenen Figur gleiche Höhe hat.

Will man z. B. ein Dreieck haben, welches dreimal so groß, als das Dreieck **abc** (Fig. 552.) seyn soll, so mache man die $bd = 3bc$, ziehe **ad** und es ist dann

$$\triangle abd = 3 \triangle abc.$$

Macht man bei dem Rechteck **efgh** die $el = 5ef$, zieht man $lm \# fg$ und verlängert man **gh** bis **m**, so ist

$$ehml = 5efgh.$$

Ebenfalls wird das Parallelogramm

$$nqsr = 4nopq$$

seyn, wenn man $nr = 4no$ gemacht hat.

§. 581.

Um Figuren zu konstruiren, die 2, 3, 4... nmal größer, als eine gegebene Figur, ihr aber zugleich auch ähnlich sind, kann man auch folgendes Verfahren anwenden, welches einfacher ist, als das, so §. 578 enthält. Man nehme eine Seite **ab** (Fig. 553.) der gegebenen Figur **abcdef**, verlängere sie bis **bg** 2, 3, 4... nmal so groß, als **ab** wird und beschreibe über **ag** einen Halbkreis **ahg**. Errichtet man nun in **b** auf **ag** ein Loth **bh** und macht man $bi = bh$, so ist **bi** die mit **ab** ähnliche Seite einer 2, 3, 4... nmal so großen Figur,

als die gegebene. Zieht man daher durch b und f, durch b und e, durch b und d gerade Linien, welche lang genug sind, um von den Linien ik, kl, lm und mn, welche mit af, fe, ed und dn parallel gezogen sind, in den Punkten k, l, m und n geschnitten zu werden, so ist ibnmlk ∽ abcdef und zugleich 2, 3, 4, 5 ... nmal so groß, als abcdef *).

Zweite Abtheilung.

Einiges über die Verwandlung der Körper.

§. 582.

Aufgabe.

Eine Pyramide abcd (Figur 554.) in ein Prisma zu verwandeln.

Auflösung.

Man bestimme die Höhe der Pyramide, theile sie in drei gleiche Theile und gebe einen solchen Theil der Höhe af des gesuchten Prisma; es ist dann

$$acdefg = abcd.$$

Beweis.

Wäre das Prisma acdefg so hoch, wie die Pyramide, so wäre diese ein Drittel von jenem. Da nun

---

*) In diese Abtheilung gehört noch §. 300, §. 301, §. 302, §. 318 und §. 325.

Der Beweis zur Auflösung des §. 300 ist folgender:

Es ist (Fig. 304.) der Konstruction wegen

1) ae : af = af : ab und weil ae = n, ab = m gemacht wurde

2) n : af = af : ab, woraus

3) $\overline{af}^2 = mn$ hervorgeht. Der Aehnlichkeit der Figuren wegen steht

4) abcd : aghk = $ab^2 : ag^2$ und da

5) ag = af ist, so wird, wenn man 1 und 3 bei 4 anwendet:

6) abcd : aghk = $m^2 : m \cdot n$ oder

7) abcd : aghk = m : n werden; und es ist dann

8) $aghk = \frac{n}{m}\, aghk.$

Für die Auflösung des §. 301 ist derselbe Beweis anzuwenden.

acdefg nur ein Drittel der Pyramidenhöhe zur Höhe hat, so muß

acdefg = abcd seyn.

§. 583.

Aufgabe.

Einen Kegel in einen Cylinder zu verwandeln.

Auflösung.

Ueber der Grundfläche des Kegels konstruire man einen Cylinder, dessen Höhe ein Drittel der Höhe des Kegels ist, welcher der verlangte ist.

Beweis.

Weil jeder Kegel ein Drittel eines Cylinders ist, der mit dem Kegel einerlei Höhe und Grundlinie hat, so folgt ꝛc.

§. 584.

Aufgabe.

Ein Prisma in eine Pyramide zu verwandeln.

Auflösung.

Man verlängere die Höhe af (Fig. 555.) des Prismas abcdef so weit, bis fg = 3 af wird und ziehe ge und de ꝛc.: es ist dann defg = abcdef.

Beweis.

In §. 582 ist der Beweis enthalten.

§. 585.

Aufgabe.

Einen Cylinder in einen Kegel zu verwandeln.

Auflösung.

Man errichte im Mittelpunkt a der Grundfläche defg (Fig. 556.) ein Loth ac = 3 ab und ziehe cd und ce; es ist dann

Kegel cde = Cylinder defg.

Beweis.

Der §. 583 enthält den Beweis.

§. 586.

Aufgabe.

Eine Pyramide in ein Prisma und einen Kegel in einen Cylinder so zu verwandeln, daß das Prisma mit der Pyramide und der Kegel mit dem Cylinder gleiche Höhe hat.

Auflösung.

Man theile die Grundfläche **abc** (Fig. 557.) der Pyramide nach §. 616 in drei gleiche Theile, so daß $\triangle$ **abe** $= \frac{1}{3} \triangle$ **abc** wird, konstruire über $\triangle$ **abe** das Prisma **abehgf** und gebe demselben die Höhe der Pyramide **abcd**; es ist dann

Prisma **abehgf** = Pyramide **abcd**.

Auf ähnliche Art verfährt man, um einen Kegel in ein Prisma zu verwandeln, welches mit dem Kegel einerlei Höhe hat.

Man konstruirt nämlich nach §. 302 einen Kreis, der ein Drittel der Grundfläche des Kegels ist und nimmt ihn zur Grundfläche des verlangten Cylinders, welchem man die Höhe des gegebenen Kegels gibt: es ist dann der hiernach konstruirte Cylinder dem Kegel gleich ꝛc.

Beweis.

Die vorstehenden §§. dieser Abtheilung enthalten den Beweis.

§. 587.

Aufgabe.

Ein Prisma oder ein Parallelepipedum in einen Kegel zu verwandeln.

Auflösung.

Die Grundfläche des Prisma, oder des Parallelepipeds verwandle man nach §. 545, §. 524 und nach §. 191 in einen Kreis und nehme diesen nach §. 303, wenn nämlich der Kegel mit den gegebenen Körpern einerlei Höhe haben soll, dreimal und konstruire hierzu einen Kegel, welcher den gegebenen Körpern gleich seyn und mit denselben einerlei Höhe haben wird.

Ist es aber nicht bestimmt, daß die Höhen gleich seyn sollen, so nehme man den Kreis, welcher der Grundfläche der gegebenen Körper gleich gemacht wurde, zur Basis des verlangten Kegels, dem man eine Höhe gibt, die drei-

mal so groß, als die des Prisma oder des Parallelepipeds ist; der Kegel hat sonach die der Aufgabe entsprechenden Eigenschaften.

Beweis.

Die vorstehenden §§. dieser Abtheilung enthalten den Beweis.

§. 588.

Aufgabe.

Einen Kegel in ein Prisma zu verwandeln, welches mit dem Kegel einerlei Höhe hat.

Auflösung.

Man verwandle die Grundfläche des gegebenen Kegels in ein Quadrat, theile dasselbe in drei gleiche Theile (§. 651.) und nehme einen Theil davon zur Basis des verlangten Körpers, welchem man eine Höhe gibt, die der des Kegels gleich ist.

Beweis.

Auch dieser Beweis liegt in den vorhergehenden Beweisen.

§. 589.

Aufgabe.

Einen Kegel in einen Cylinder zu verwandeln, der mit dem Kegel einerlei Höhe hat.

Auflösung.

Man konstruire einen Kreis, der dreimal so groß ist, als die Grundfläche des Kegels (§. 303.), mache denselben zur Basis des verlangten Cylinders, dem man die Höhe des Kegels gibt.

Beweis.

§. 583.

§. 590.

Aufgabe.

Ein Prisma in einen Cylinder zu verwandeln.

Auflösung.

Nach §. 524, §. 192 und §. 545 verwandle man die Grundfläche des Prisma in einen Kreis, welchen man zur Grundfläche des gesuchten Cylinders macht und welchem man die Höhe des gegebenen Prisma gibt.

Beweis.

Weil Parallelepipeden, Prismen und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, einander gleich sind, so folgt, daß, da der gefundene Cylinder mit dem gegebenen Prisma gleiche Basis und Höhe hat, die Konstruction richtig ist.

§. 591.

Aufgabe.

Einen Cylinder in einen Kegel zu verwandeln, der mit dem Cylinder gleiche Höhe hat.

Auflösung.

Man konstruire einen Kreis, der ein Drittel der Basis des Cylinders ist (§. 302.) und nehme ihn zur Grundfläche des verlangten Kegels, welchem man die Höhe des Cylinders gibt.

Beweis.

Die Gründe dieser Konstruction enthält §. 583.

§. 592.

Aufgabe.

Einen Cylinder in ein Prisma zu verwandeln.

Auflösung.

Die Grundfläche des Prisma verwandle man (§. 545.) in ein Quadrat und dieses dann in diejenige Figur, welche die Grundfläche des Prisma haben soll. Nimmt man nun diese Figur zur Basis eines Prisma, dessen Höhe der des Cylinders gleich gemacht wird, so ist die Verwandlung vollzogen.

Beweis.

§. 590.

§. 593.

Aufgabe.

Dreieckige Prismen in vier, fünf .... und neckige zu verwandeln.

Auflösung.

Die Grundfläche des dreieckigen Prisma verwandle man in eine vier, fünf .... oder n seitige Figur, welche man hierauf zur Grundfläche des verlangten Prisma macht, dessen Höhe der des gegebenen Körpers gleich ist.

Beweis.

Wie §. 590.

§. 594.

Aufgabe.

Ein Parallelepipedum in einen Würfel zu verwandeln.

Auflösung.

Es mögen die Dimensionen der Grundfläche das Parallelepipedum **a** und **b**, die Höhe aber **c** seyn

Man verwandle die Grundtfläche in ein Quadrat (§. 545) und suche zu der Seite desselben und zur Höhe zwei mittlere Proportionallinien §. 204., von denen die kleinere die Seite des verlangten Würfels ist.

Beweis.

Es ist, wenn man **d** der Seite des der Grundfläche gleichen Quadrats setzt:

$$1)\ d = \sqrt{ab}.$$

Sucht man nun zu **d** und zu **c** die mittlern Proportionirten, so findet man

$$2)\ \text{die kleinere Proportionzahl} = \sqrt[3]{cd^2}\ *),$$

welches die Seite des Würfels ist und weshalb

$$3)\ \text{der Inhalt des Würfels} = \left(\sqrt[3]{cd^2}\right)^3 \text{ seyn muß.}$$

Setzt man nun 1 nach 3, so ergibt sich

$$4)\ \text{der Inhalt des Würfels} = \left(\sqrt[3]{c(\sqrt{ab})^2}\right)^3 \text{ oder}$$

$$= \left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 \text{ oder}$$

$$= abc.$$

---

*) Wenn **d** und **c** die Größen sind, zwischen welche die mittlern Proportionalen **x** und **y** gesucht werden sollen, so ist

$$1)\ d : x = x : y \text{ und } 2)\ x : y = y : c;$$

hieraus wird $3)\ y = \frac{x^2}{d}$ und $4)\ y = \sqrt{cx}$; aus 2 und 4 erhält man $5)\ \frac{x^2}{d} = \sqrt{cx}$ woraus $6)\ x = \sqrt[3]{cd^2}$ erhalten wird.

Kommt 6 nach 3, so erhält man $7)\ y = \left(\sqrt[2]{cd}\right)^2 : d$ woraus man $8)\ y = \sqrt[3]{c^2d}$ findet.

Da nun das Produkt aus 4 dem Kubikinhalte des Parallelepipedums gleich ist, so folgt, daß die Konstruction richtig ist.

§. 595.

Aufgabe.

Eine Kugel in einen Cylinder zu verwandeln, dessen Grundfläche den Kugeldurchmesser zum Diameter hat.

Auflösung.

Man theile den Kugeldurchmesser in drei gleiche Theile und nehme zwei solcher Theile für die Höhe des Cylinders, dem man eine Basis gibt, welche den Kugeldurchmesser zum Diameter hat; der Cylinder ist dann der verlangte.

Beweis.

Wenn der Kugeldurchmesser $= d$, der Kubikinhalt der Kugel $= k$ und der Inhalt des Cylinders $= z$ ist, so wird

$$1)\ K = \frac{d^3 \pi}{6};$$

und weil die Höhe des zu konstruirenden Cylinders $= \frac{2d}{3}$ gemacht wurde, so ist

$$2)\ z = \frac{d^2 \pi}{4} \times \frac{2d}{3} \text{ oder}$$

$$3)\ z = \frac{d^3 \pi}{6}.$$ Aus 1 und 3 folgt aber, daß

$$4)\ z = k$$ ist, folglich ist die Richtigkeit der Konstruction dargethan.

§. 596.

Aufgabe.

Einen Cylinder in eine Kugel zu verwandeln.

Auflösung.

Man suche zum Durchmesser des Cylinders und zu $\frac{3}{2}$ seiner Höhe zwei mittlere Proportionalen nach §. 204 oder durch Rechnung *); die kleinere derselben ist der Durchmesser einer dem Cylinder gleichen Kugel.

*) Anmerkung zu §. 594.

Beweis.

Wenn der Kubikinhalt der Kugel = k, der Cylinderinhalt = z, der Cylinderdurchmesser = d und der Durchmesser der Kugel = δ ist, so ist

$$1)\ z = \frac{d^2 h \pi}{4}$$ *).

Da nun (Anmerkung zu §. 594.)

die kleinern der Proportionalen $= \sqrt[3]{c\,d^2}$ ist und

c hier $= \frac{3}{2}h$ ist, so wird

der durch die Konstruction erhaltene Kugeldurchmesser

nämlich 2) $\delta = \sqrt[3]{\frac{3}{2}h\,d^2}$ seyn.

Da nun der Kubikinhalt der Kugel, das ist

3) $k = \frac{\delta^3 \pi}{6}$ (Arithm. Handb. §. 269.) ist, so muß, wenn 2 nach 3 kommt:

4) $k = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}h\,d^2}\right)^3$ oder

5) $k = \frac{d^2 h \pi}{4}$

werden. Da nun, wenn 1 mit 5 verbunden wird,

6) $k = z$

ist, so folgt, daß die Auflösung richtig ist.

§. 597.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser d einer Kugel gegeben, man soll die Höhe h eines Cylinders bestimmen, dessen Grundflächen Durchmesser D und dessen Kubikinhalt dem der Kugel gleich ist.

Auflösung.

Man mache ab = D (Fig. 558.),
bc = d und
ad = d, ziehe bd und mit derselben die ce parallel. Ferner mache man
fg = 3D,
gh = 2de und
fi = d, ziehe gi und mache die hk #

*) Arithm. Handbuch §. 248.

gh; es ist hier noch die ik = h die verlangte Höhe des Cylinders.

Beweis.

Wegen der Konstruction ist

1) ab : bc = ad : de oder auch

2) D : d = d : de, woraus

3) $de = \frac{d^2}{D}$ wird.

Ferner ist

4) fg : gh = fi : ik; und da

5) fg = 3D,

6) gh = 2de und

7) fi = d gemacht wurde, so wird, wenn die Werthe aus 5, 6 und 7 nach 4 gesetzt werden:

8) 3D : 2de = d : h oder wegen 3 :

9) $3D : \frac{2d^2}{D} = d : h$; woraus

10) $h = \frac{2d^3}{3D^2}$ erhalten wird.

Setzt man nun der Kürze wegen

den Kubikinhalt der Kugel = K und

den Kubikinhalt des Cylinders = Z, so ist

11) $K = \frac{d^3\pi}{6}$ und

12) $Z = \frac{D^2\pi h}{4}$.

Substituirt man 10 in 12, so wird

13) $Z = \frac{D^2\pi}{4} \times \frac{2d^3}{3D^2}$ oder

14) $Z = \frac{d^3\pi}{6}$.

Da nun wegen 11 und 14

15) Z = K erhalten wird, so folgt, daß bewiesen ist, was zu beweisen war.

§. 598.

Aufgabe.

Einen Würfel in ein Parallelepipedum von gegebener Höhe zu verwandeln.

Auflösung.

Wenn b die Seite des Würfels und h die gegebene Höhe des Parallelepipeds ist, so mache man ab = h (Fig. 559.), bc = b und auch ad = b. Zieht man nun bd und ce # bd, so ist de = d die eine Seite der Grundfläche des Parallelepipedes und b ist die andere Seite derselben, wozu die gegebene Höhe h gehört.

Das aus diesen Dimensionen gebildete Parallelepipedum ist dem gegebenen Würfel gleich und hat die bestimmte Höhe h.

Beweis.

Es ist 1) ab : bc = ad : de oder

2) h : b = b : d gemacht worden, woraus

3) $d = \frac{b^2}{h}$ wurde.

Setzt man den Inhalt des Kubus = W, den des Parallelepipeds = P, so ist

4) $W = b^3$ und

5) P = bhd.

Bringt man nun 3 nach 5, so wird:

6) $P = bh \cdot \frac{b^2}{h}$ oder

7) $P = b^3$. Da nun wegen 4 und 7

8) W = P ist, so folgt, daß die Konstruction richtig ist.

§. 599.

Aufgabe.

Einen Würfel in eine Kugel zu verwandeln.

Auflösung.

Nach §. 192. verwandle man eine Seitenfläche abcd (Fig. 560.) in einen Kreis, dessen Durchmesser ef ist und mache jeden Schenkel des rechten Winkels h dem Durchmesser ef gleich, daß nämlich gh = hi = ef wird und ziehe gi. Auf gi errichte man in i das Loth ik = ef, ziehe gk und halbire sie in l und die gl halbire man in α.

Jetzt wird mn = αg,

on = gl,

mp = ab gemacht, np gezogen und oq # np gemacht.

Sucht man nun nach §. 204., wie die hier beigesetzte Figur zeigt, zwischen lg und pq zwei mittlere Proportionalen, so ist die kleinere rz derselben der Durchmesser einer Kugel, deren Inhalt dem des gegebenen Würfels gleich ist.

Beweis.

Setzt man die Seite ab des gegebenen Würfels $= a$, so ist

1) $ef = 2a\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ und es ist

2) $gk = 2a\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

Nun steht wegen der Konstruction:

3) $mn : no = mp : pq$ oder

4) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} : a\sqrt{\frac{3}{\pi}} = a : pq$, woraus

5) $pq = 2a$ erhalten wird.

Ebenfalls ist wegen der Konstruction:

6) $lg : x = x : y$ und

7) $x : y = y : pq$, weil die mittleren Proportionalen zwischen lg und pq gesucht wurden. Löst man nun (§. 594. Anmerkung) 6 und 7 auf, so wird, weil in der Figur

8) $zr = x$ ist,

9) $zr = a\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$*).

---

*) Es ist vornehmlich, da aus $lg = \frac{1}{2}gk$ wegen $2lg = a\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ wird,

1) $a\sqrt{\frac{3}{\pi}} : x = x : y$; und wegen 5 steht:

2) $x : y = y : 2a$, woraus

3) $y = x^2 : a\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ sich ergibt. Setzt man diesen für y gefundenen Werth nach 2, so ist

4) $x : \frac{x^2}{a\sqrt{\frac{3}{\pi}}} = \frac{x^2}{a\sqrt{\frac{3}{\pi}}} : 2a$, woraus

5) $x = a\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ hervorgeht.

Da nun zr der Durchmesser der dem Würfel gleichen Kugel ist, so muß, wenn K den kubischen Inhalt der Kugel und W den des Würfels bezeichnet:

10) $K = \frac{\overline{zr}^3 \pi}{6}$ seyn; und wenn man hierein den Werth aus 9 setzt, so ist

11) $K = \frac{\pi}{6}\left(a \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^3$ oder

12) $K = a^3$.

Es ist aber auch

13) $W = a^3$ und daher wegen 11 und 12:

14) $K = W$; wodurch der Beweis gegeben ist, daß die Konstruction vollkommen richtig ist, wenn nämlich die Verwandlung des Quadrats abcd in einen Kreis es wäre.

§. 600.

Aufgabe.

Eine Kugel in einen Würfel zu verwandeln.

Auflösung.

Man beschreibe mit dem Kugelhalbmesser einen Kreis, mache diese Kreisfläche zur Basis eines Cylinders, dessen Höhe zwei Drittel vom Kugeldurchmesser hat und verwandle diesen Cylinder nach §. 592. in ein Prisma, das nach §. 593 in ein Parallelepipedum, und diesen Körper endlich nach §. 594. in einen Würfel.

Beweis.

Weil jede Kugel zwei Drittel eines Cylinders ist, der mit der Kugel einerlei Durchmesser hat und dessen Höhe diesem Durchmesser gleich ist, so folgt übrigens auch noch wegen §. 592., §. 593. und §. 594. ꝛc.

§. 601.

Noch mehrere Aufgaben, das Verwandeln der Körper betreffend, zu geben, wurde deshalb für unnöthig oder vielmehr für überflüssig erachtet, weil jeder, der die in dieser Abtheilung vorgekommenen Fälle mit Aufmerksamkeit durchgenommen und sich einige Fertigkeit im Konstruiren analytischer Ausdrücke erworben hat, auch bei andern Aufgaben sich mit Umsicht wird berechnen können.

So wie bei den Verwandeln der Flächen (§. 577.) gezeigt wurde, so ist es auch hier; man bildet nämlich eine Gleichung zwischen den gegebenen und den zu findenden Körpern, bringe in dem Ausdrucke für den letztern etwa eine Seite, einen Halbmesser ꝛc. als unbekannte Größe an, bestimme diese aus der ganzen Gleichung und gehe nun daran, sie zu konstruiren. Daß man bei diesem Geschäfte nicht immer mit der Elementargeometrie auskommt, ist wahr, doch auch für diesen Fall enthält die eilfte Abtheilung das Nöthige, als Wink für den aufmerksamen Sucher.

Die noch folgenden Aufgaben dieser Abtheilung, welche das Summiren, das Abziehen, das Multipliciren und das Theilen der Körper enthalten, mögen als Anhang derselben gelten.

§. 602.

Aufgabe.

Prismen und Pyramiden, welche gleiche Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben, zu summiren *).

Auflösung.

Man konstruire eine Fläche, welche so groß ist wie die Grundflächen der gegebenen Körper zusammengenommen, mache sie zur Basis eines Prisma oder einer Pyramide, welche mit den gegebenen Körpern gleiche Höhe haben, und es ist der hierdurch entstandene Körper der verlangte.

Beweis.

Weil Pyramiden und Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen einander gleich sind, so ꝛc.

§. 603.

Aufgabe.

Kegel und Cylinder von gleichen Höhen aber verschiedenen Grundflächen zu summiren oder: einen Kegel oder einen Cylinder finden, der mehrern dieser Körper zusammengenommen gleich ist.

---

*) Haben aber die gegebenen Körper ungleiche Grundflächen und Höhen, so verwandle man sie zuvörderst in Parallelepipeden, welche gleiche Höhen aber verschiedene Grundflächen haben und summire sie dann auf die beschriebene Art.

Auflösung.

Man verfahre mit den Kegeln und den Cylindern ganz so, wie die Auflösung des §. 602. zeigt.

Beweis.

§. 602.

§. 604.

Ebenso wie bei den vorhergehenden Aufgaben operirt man, wenn Parallelepipeden von verschiedenen Grundflächen und Höhen zu summiren sind. Und im Fall, daß man Kegel und Cylinder von verschiedenen Grundflächen und Höhen summiren soll, so verwandle man die Kegel in Cylinder und diese bringe man nach der Auflösung der folgenden Aufgabe auf einerlei Höhen; summire sie und verwandle dann den Cylinder der Summe wieder in einen Kegel.

Die gedachte Aufgabe ist:

Der Durchmesser eines Cylinders ist d, dessen Höhe h; wie hoch ist ein anderer Cylinder, dessen Durchmesser D und dessen Kubikinhalt dem des gegebenen Cylinders gleich ist? Ferner: Aus dem Durchmesser d und der Höhe h eines Cylinders den Durchmesser eines andern Cylinders zu finden, dessen Höhe H und dessen körperlicher Inhalt dem des gegebenen Cylinders gleich ist.

Auflösung und Beweis.

Der Inhalt des gegebenen Cylinders $= \frac{1}{4} d^2 \pi h$;
der Kubikinhalt des gesuchten Cylinders $= \frac{1}{4} D^2 \pi H$
folglich: $\frac{1}{4} D^2 H = \frac{1}{4} d^2 \pi h$, woraus die gesuchte Höhe $H = \frac{d^2 h}{D^2}$ wird.

Ferner ist:

Der Inhalt des gegebenen Cylinders $= \frac{1}{4} d^2 \pi h$;
der Kubikinhalt des gesuchten Cylinders $= \frac{1}{4} D^2 \pi h$,
folglich: $\frac{1}{4} D^2 h \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi h$, woraus der gesuchte Durchmesser $= D\, d \sqrt{\frac{h}{H}}$ wird.

§. 605.

Aufgabe.

Einen Würfel zu finden, dessen Kubikinhalt dem mehrerer Würfel von verschiedener Größe gleich ist.

Auflösung.

Es sind etwa die drei Kuben **a**, **b** und **c** (Fig. 561.) gegeben, deren Seiten **f**, **g** und **h** seyn mögen.

Man mache $de = f$,

$ei = g$ und auch

$dk = g$,

ziehe **ek** und lege durch **i** die **il** # **ek**.

Ferner mache man

$mn = g$,

$no = kl$ und auch

$mp = kl$,

ziehe **np** und lege durch **o** die **oq** # **np**. Nun suche mache zu **f** und $f + pq$ nach §. 204. zwei mittlere Proportionallinien und nehme die kleinere derselben, sie ist die Seite eines Würfels, welcher so groß ist, wie die beiden Würfel **a** und **b** zusammengenommen. Nun nehme man die Seite des so eben gefundenen Würfels, trage sie von **d** nach **e** und mache **ei** so wie $dk = h$; ziehe **ek** und **il** # **ek**.

Ferner mache man $mn = h$,

$no = kl$ und auch

$mp = kl$,

ziehe **np** und lege durch **o** die **oq** # **kp**; hierdurch ergibt sich **pq**, welche Linie die Seite eines Würfels ist, der so groß ist wie **a**, **b** und **c** zusammengenommen.

Wären noch mehrere Würfel gegeben, so müßte man das eben gezeigte Verfahren fortsetzen.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) $de : ei = dk : kl$ oder

2) $f : g = g : kl$, woraus

3) $kl = \frac{g^2}{f}$ wird.

Ferner ist

4) $mn : no = mp : pq$ oder

5) $g : kl = kl : pq$ oder wegen 3:

6) $g : \frac{g^2}{f} = \frac{g^2}{f} : pq$, daher wird

7) $p = \frac{g^3}{f^2}$.

Weil nun zwischen f und $f + \frac{g^3}{f^2}$ die mittlern Proportionalen bestimmt wurden, so ist (§. 594 Anmerkung), wenn man die kleinere derselben durch m ausdrückt,

$$8)\ m = \sqrt[3]{f^2\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)}.$$

Weil ferner

9) de : ei = dk : kl, oder weil oben

10) de = m,

11) ei = h und auch

12) dk = h gemacht wurde:

13) m : h = h : kl, so ist

$$14)\ kl = \frac{h^2}{m} \text{ und wegen 8:}$$

$$15)\ kl = h^2 : \sqrt[3]{f^2\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)}.$$

Nun ist auch

16) mn : no = mp : pq oder

$$17)\ h : \sqrt[3]{f^2\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)} = \frac{h^2}{\sqrt[3]{f^2\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)}} : pq,$$

woraus $18)\ pq = \frac{h^3}{\sqrt[3]{f^4\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)^2}}$ wird.

Setzt man nun die kleinere der zwischen m und $m + \frac{h^3}{\sqrt[3]{f^4\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)^2}}$ liegenden Proportionirten = n, so ist (§. 594 Anm.)

$$19)\ n = \sqrt[3]{m^2\left(m + \frac{h^3}{\sqrt[3]{f^4\left(f+\frac{g^3}{f^2}\right)^2}}\right)}$$

wodurch die Seite eines Würfels bestimmt ist, dessen Kubikinhalt = a + b + c.

Man kubire nun n und findet man

$$n^3 = f^3 + g^3 + h^3,$$

so ist die Richtigkeit der Konstruction dargethan.

Setzt man zu dem Ende 8 nach 19, so wird:

$$20)\ n = \sqrt[3]{f^3 + g^3 + \left(h^3 \sqrt[3]{f^4 \left(f + \frac{g^3}{f^2}\right)^2}\right) : \sqrt[3]{f^4 \left(f + \frac{g^3}{f^2}\right)^2}}$$

oder 21) $n = \sqrt[3]{f^3 + g^3 + h^3}$ oder

22) $n^3 = f^3 + g^3 + h^3$, wodurch die Richtigkeit der obigen Konstruction dargethan ist.

§. 606.

Aufgabe.

Mehrere gegebene Kugeln zu summiren, das heißt eine Kugel finden, deren körperlicher Inhalt dem mehrerer gegebenen Kugeln gleich ist.

Auflösung.

Man verfahre mit den Durchmessern der Kugeln ganz so, wie man im vorhergehenden §. mit den Seiten der Würfel verfuhr.

Beweis.

Wie §. 605.

§. 607.

Mittels der Kuben ist man im Stande, alle vorkommenden Körper zu summiren und bei den Körpern dasjenige zu verrichten, was bei den ebenen Flächen durch Quadrate bewerkstelligt wurde.

§. 608.

Aufgabe.

Einen Würfel zu konstruiren, welcher dem Unterschiede der Kubikinhalte zweier Würfel gleich ist.

Auflösung.

Die Seite des größern Kubus sey d, die des kleinern b.

Man mache de = d (Fig. 561.)
ei = b und auch
dk = b, ziehe ek und die il # ek.

Ferner mache man mn = b,
no = kl und auch
mp = kl, ziehe np und die oq # np.

Nun suche man nach §. 204 oder nach §. 336 zu d und d — pq zwei mittlere Proportionalen, von denen die kleinere die Seite eines Würfels ist, dessen Kubikinhalt dem Unterschied aus den gegebenen Würfeln d^3 und b^3 gleich ist.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) de : ei = dk : kl oder
2) d : b = b : kl, woraus
3) $kl = \frac{b^2}{d}$ wird.

Ferner ist 4) mn : no = mp : pq oder
5) b : kl = kl : pq, oder wegen 3:
6) $b : \frac{b^2}{d} = \frac{b^2}{d} : pq$, folglich
7) $pq : \frac{b^3}{d^2}$.

Da nun zwischen d und d — pq die mittlern Proportionirten gesucht wurden und man davon die kleinere zur Seite des gesuchten Kubus nahm, so ist, wenn man diese Seite durch m bezeichnet

8) $m = \sqrt[3]{d^2\left(d - \frac{b^3}{d^2}\right)}$ (§. 94 Anmerkung.)

oder 9) $m = \sqrt[3]{d^3 - b^3}$; und wenn man kubirt, so wird 10) $m^3 = d^3 - b^3$,
woraus hervorgeht, daß m die Seite des verlangten Kubus ist.

§. 609.

Aufgabe.

Eine Kugel zu konstruiren, welche so groß ist, als der Unterschied zweier gegebenen Kugeln.

Auflösung.

Mit dem Durchmesser der gegebenen Kugeln verfahre man ganz so, wie man §. 608 mit den Seiten der gegebenen Würfel verfuhr. Die durch diese Konstruction gefundene Linie ist der Durchmesser der verlangten Kugel. Der

Beweis

dieses Verfahrens ist ganz derselbe, wie der des §. 608.

§. 610.

Aufgabe.

Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel von einander abzuziehen; oder wenn zwei solcher Körper gegeben sind, einen dritten Körper zu finden, dessen Kubinhalt dem Unterschiede des Inhalts der gegebenen Körper gleich ist.

Auflösung.

Haben die gegebenen Körper gleiche Höhen, so suche man den Unterschied ihrer Grundflächen und konstruire darüber einen Körper, welcher den gegebenen Körpern ähnlich ist und gleiche Höhe mit ihnen hat: er ist der verlangte. Der

Beweis

dieser Konstruction liegt in dem Satze: Pyramiden, Kegel, Prismen und Cylinder von einerlei Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, daher ꝛc.

§. 611.

Aufgabe.

Einen Würfel mehrmal, z. B. 2, 3, 4 .... nmal zu nehmen, d. h. den Kubikinhalt des Würfels mit irgend einer Zahl 2, 3, 4 .... n zu multipliciren und das Produkt so zu bilden, daß es wieder ein Würfel ist *).

Auflösung.

Man nehme eine Seite des gegebenen Würfels so viel mal, als die Zahl Einheiten hat, mit welcher eben dieser Würfel multiplicirt werden soll, suche zu dieser Linie (Produkt) und zur Seite des gegebenen Würfels zwei mittlere Proportionirte (§. 204 oder §. 336); die kleinere derselben (nämlich die zweite) ist die Seite des verlangten Kubus.

Beweis.

Wenn der Kubikinhalt des Würfels a ist, so muß dessen Seite $\sqrt[3]{a}$ seyn. Nach der Auflösung sollte die kleine der beiden mittlern Proportionirten zwischen $\sqrt[3]{a}$ und $n\sqrt[3]{a}$ genommen werden.

*) §. 605.

Diese ist nun aber

$$= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a})^2 \cdot n\sqrt[3]{a}} \text{ oder}$$

$$= \sqrt[3]{n\,a} =$$ der Seite des Würfels, welcher das Vielfache des gegebenen Würfels ist.

Da nun der gegebene Würfel n mal genommen werden soll, so muß der Kubikinhalt des verlangten Würfels na seyn.

Ist nun obige Auflösungsmethode richtig, so muß die gefundene Seite des Würfels, wenn man sie kubirt, na geben. Da nun $\sqrt[3]{na}$ die Seite des Würfels und $(\sqrt[3]{na})^3 = na$ ist, so folgt, daß die Konstruction richtig ist.

§. 612.

Aufgabe.

Eine Kugel zu konstruiren, welche das Vielfache einer gegebenen Kugel ist.

Auflösung.

Mit dem Kegeldurchmesser verfahre man eben so, wie man mit der Seite des Würfels (§. 611.) verfuhr und man erhält dadurch den Diameter der verlangten Kugel.

Beweis.

§. 611.

§. 613.

Um das Vielfache von Prismen, Cylindern, Pyramiden und Kugeln ꝛc. zu bekommen, nehme man die Grundflächen dieser Körper 2, 3, 4 .... n mal, mache diese erhaltenen Flächen zu Grundflächen der gesuchten Körper, denen man die Höhe der gegebenen Körper gibt.

§. 614.

Aufgabe.

Es soll bestimmt werden, der wie vielste Theil ein Würfel von einem andern Würfel ist.

Auflösung.

Man trage die Seite des größern Würfels von d nach e (Fig. 561.) und die Seite g des kleinern Würfels

von e nach i und von d nach k, ziehe ek und mache il # ek. Ferner trage man g von m nach n, kl von n nach o und von m nach p, ziehe np und mache oq # np. Untersucht man nun, wie viel mal pq in der Seite f enthalten ist, so findet man, der wie vielste Theil der Würfel b von dem Würfel a ist.

Beweis.

Es ist 1) $de : ei = dk : kl$ oder

2) $f : g = g : kl$, folglich

3) $kl = \frac{g^2}{f}$. Ferner ist

4) $g : kl = kl : pq$, daher

5) $pq = \frac{\overline{kl}^2}{g}$; oder wegen 3:

6) $pq = \left(\frac{g^2}{f}\right)^2 : g$, das ist

7) $pq = \frac{g^3}{f^2}$.

Nun wurde f durch pq getheilt und daher ist

8) $f : \frac{g^3}{f^2} = \frac{f^3}{g^3}$ = der Zahl, welche anzeigt, wie viel mal b in a enthalten ist.

Da nun $f^3 = a$ und

$g^3 = b$ ist, so zeigt

$\frac{f^3}{g^3} = \frac{a}{b}$ den verlangten Quotient an und es ist bewiesen, was zu beweisen war.

§. 615.

Aufgabe.

Eine größere Kugel durch eine kleinere zu theilen, das heißt, zu untersuchen, wie viel mal eine kleinere Kugel in einer größern enthalten ist.

Auflösung.

Man verfahre mit den Durchmessern der gegebenen Kugeln eben so, wie §. 614 mit den Seiten der Würfel verfahren wurde. Hat man nun gefunden, wie viel mal

die hierdurch erhaltene Linie im Durchmesser der größten Kugel enthalten ist, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis.
Wie §. 614.

Dritte Abtheilung.

Theilung ebener Figuren*).

§. 616.

Aufgabe.

Ein Dreieck **abc** (Fig. 562.) in eine beliebige Anzahl gleicher (z. B. in drei) Theile und zwar so zu theilen, daß die Theilungslinien aus einer Spitze **a** des Dreiecks gehen.

Auflösung.

Man theile die dem Winkel **a** gegenüber liegende Seite **bc** in so viel gleiche Theile, als in wie viel Theile das Dreieck getheilt werden soll, hier in drei und verbinde die Theilungspunkte **d** und **e** mit der Spitze **a**; es ist sodann

$$\triangle abd = \triangle ade = \triangle ace = \tfrac{1}{3} \triangle abc.$$

Beweis.

Weil die Dreiecke **abd**, **ade** und **ace** gleiche Grundlinien und einerlei Höhe haben, so sind sie einander gleich, folglich ꝛc.

§. 617.

Aufgabe.

Das Dreieck **abc** (Figur 562.) dergestalt etwa in drei Theile zu theilen, daß dessen Theile ein gewisses Verhältniß zu einander haben, die Theilungslinien aber wie bei der vorigen Aufgabe aus einer Spitze **a** des Dreiecks gehen.

Auflösung.

Man theile die der Spitze **a** gegenüber liegende Seite **bc** in so viel Theile, als das Dreieck erhalten soll (hier in drei), die sich zu einander verhalten, wie die zu bilden-

---

*) In diese Abtheilung gehören auch noch: §. 318, §. 319, §. 320, §. 321, §. 322, §. 323.

den Theile des Dreiecks (§. 3.) und verbinde die Theilpunkte d und e mit a durch gerade Linien ad und ae.

Beweis.

Weil Dreiecke von einerlei Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten, so folgt, daß ꝛc.

§. 618.

Durch Rechnung wird jedes Dreieck, bei dem die Theilungslinien aus einer Spitze desselben gehen, auf folgende Art getheilt, wenn die Theile ein bestimmtes Verhältniß, z. B. wie 3 : 4 : 5 : 6 haben sollen.

Man sage $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ und setze, wenn die Basis 60, die Höhe aber 30, folglich der Flächeninhalt $(30 \times 60) : 2 = 900$ ist:

18 : 60 = 3 : Basis **ae** (Figur 563.) des ersten Theils des Dreiecks **abc**, d. i. des Dreiecks **abd**;

18 : 60 = 4 : Basis **af** des zweiten Theils, d. i. des Dreiecks **bef**;

18 : 60 = 5 : Basis **fg** des dritten Theils, d. i. des Dreiecks **bfg**; und endlich

18 : 60 = 6 : Basis **gc** des vierten Theils, d. i. des Dreiecks **bcg**.

Hieraus erhält man:

$$ae = 10\,ac,$$
$$ef = 13\tfrac{1}{3}\,ac,$$
$$fg = 16\tfrac{2}{3}\,ac \text{ und}$$
$$cg = 20\,ac;$$

woraus
$$\triangle abe = 150,$$
$$\triangle bef = 200,$$
$$\triangle bfg = 250 \text{ und}$$
$$\triangle bcg = 300 \text{ wird.}$$

Wenn der Flächeninhalt eines jeden Theils im Quadratmaas gegeben ist, so findet man die Grundlinie eines jeden Theils, wenn man den Flächeninhalt desselben durch die Höhe theilt und den Quotient doppelt nimmt.

Hat z. B. ein Dreieck 2200 □′ und soll es in drei Theile zerlegt werden, von denen der erste 1200, der andere 400 und der dritte Theil 600 □′ haben soll, so ist, wenn man die Höhe des zu theilenden Dreiecks auf 40′ bestimmt hat:

die Grundlinie des ersten Dreiecks $= \frac{1200'}{40} \times 2 = 60'$,

— — — andern — $= \frac{400'}{40} \times 2 = 20'$,

— — — dritten — $= \frac{600'}{40} \times 2 = 30'$.

Der Beweis liegt in

$$b = \frac{2F}{h},$$

wenn b die Grundlinie, F der Flächeninhalt und h die Höhe des Dreiecks ist.

§. 619.

Aufgabe.

Das Dreieck abc (Fig. 564.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinien df aus einem in der Seite bc liegenden Punkte d gehen.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkte d in der Seite bc ziehe man nach der ihm gegenüber liegenden Spitze a die ad; halbire die bc in e, mache ef # ad und ziehe df; es ist dann

$$abdf = \triangle cdf = \tfrac{1}{2} \triangle abc.$$

Beweis.

Zieht man ae, so ist

1) $\triangle bae = \frac{1}{2} \triangle abc$. Nun ist
2) $\triangle abd = \triangle abd$ und
3) $\triangle adf = \triangle ade$; folglich wird aus 2 und 3:
4) $\triangle adf + \triangle abd = \triangle ade + \triangle abd$, das ist:
5) $abdf = \triangle bae$. Verbindet man 1 mit 15, so wird
6) $abdf = \frac{1}{2} \triangle abc$.

§. 620.

Aufgabe.

Das Dreieck abc (Fig. 565.) so zu halbiren, daß die Theilungslinie auf einer Seite ab lothrecht steht.

Auflösung.

Unter ab beschreibe man einen Halbkreis ahb, fälle von c auf ab das Loth cd, halbire bd in g, fälle von

g auf ab einen Perpendikel gh an die Peripherie des Halbkreises, ziehe bh und mache be = bh. Wird nun ef in e auf ab normal gemacht, so ist:

$$acfe = \triangle bef = \tfrac{1}{2} \triangle abc.$$

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) $bg : bh = bh : ab$ oder
2) $bg : be = be : ab$, oder auch
3) $\frac{bd}{2} : be = be : ab$. Ferner ist, weil

$$\triangle bcd \sim \triangle bef,$$

4) $cd : bd = ef : be$. Wird nun 4 mit 3 verbunden, so erhält man
5) $\frac{cd \times bd}{2} : be \times bd = be \times ef : ab \times be$ oder
6) $cd : 2\,be = ef : ab$, das ist
7) $2 \times be \times ef = ab \times cd$, oder wenn 7 durch 4 getheilt wird:
8) $\frac{be \times ef}{2} = \frac{ab \times cd}{4}$.

Da nun

9) $\frac{be \times ef}{2} = \triangle bef$ und
10) $\frac{cd \times ab}{4} = \frac{ab \times cd}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \triangle abc$,

so folgt, wenn 9 und 10 nach 8 kommen,

11) $\triangle bef = \frac{1}{2} \triangle abc$, und daher ist auch
12) $acfe = \triangle bef = \frac{1}{2} \triangle abc$.

§. 621.

Hätte das Dreieck abc (Fig. 565.) in mehr als zwei, etwa in drei Theile getheilt werden sollen, so müsse man eben so, wie §. 620. gezeigt wurde, konstruiren, die bd aber nicht in zwei, sondern in drei gleiche Theile theilen und $bg = \frac{2}{3}\,bd$ machen. Es wäre dann

1) $\frac{2}{3}\,bd : be = be : ab$. Ferner wäre
2) $cd : bd = ef : be$, folglich aus 1 und 2:
3) $2cd : 3be = ef : ab$, woraus
4) $3be \times ef = 2cd \times ab$ oder

5) $\frac{3be \times ef}{4} = \frac{cd \times ab}{2}$ würde.

Nun wäre

6) $\frac{cd \times ab}{2} = \triangle abc$ und

7) $\frac{3}{2} \times \frac{bd \times ef}{2} = \frac{3}{2} \triangle bef$, demnach würde aus 5

8) $\frac{3}{2} \triangle bef = \triangle abc$ oder

9) $\triangle bef = \frac{2}{3} \triangle abc$ werden.

Macht man nun in dem Dreiecke bef noch eine Theilungslinie lothrecht auf ab, welche das Dreieck halbirt, so ist das Dreieck abc in drei gleiche Theile getheilt.

Aehnlich würde man verfahren müssen, um das Dreieck in mehr gleiche Theile zu theilen.

§. 622.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie eine gebrochene ist, welche einen innerhalb des Dreiecks liegenden Punkt o berührt.

Auflösung.

Man halbire die Seite ac (Fig. 566.) in d, ziehe durch d und o die df und mache be # df. Wird nun bo und eo gezogen, so ist

aboe = bceo.

Beweis.

Zieht man bd, so ist

1) $\triangle bde = \triangle beo$, und weil

2) $\triangle bec = \triangle bec$, so wird wegen 1 und 2:

3) $\triangle bde + \triangle bec = \triangle beo + \triangle bec$, oder wenn man statt der Theile das Ganze setzt:

4) $\triangle bcd = bceo$. Nun ist

5) $\triangle bcd = \frac{1}{2} \triangle abc$, folglich wird

6) $bceo = \frac{1}{2} \triangle abc$, und daher auch

7) $aboe = \frac{1}{2} \triangle abc$ seyn, woraus denn folgt, daß

8) aboe = bceo ist.

§. 623.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 567.) dergestalt zu halbiren, daß die Verlängerung des einen Theils der Theilungslinie, welche eine gebrochene ist, durch einen innerhalb des Dreiecks liegenden Punkt o geht.

Auflösung.

Man halbire eine Seite, etwa **bc** in **e**, ziehe **eo** und **ao**, halbire **ao** in **f**, mache **eg** # **ao** und **fg** # **eo**; die gebrochene Linie **af**, **fg** und **eg** ist die Halbirungslinie, deren Theil **af** bei hinreichender Verlängerung durch **o** geht.

Beweis.

Weil **ofge** ein Parallelogramm ist, so muß

1) **of** = **eg** seyn, und da
2) **of** = **af** gemacht wurde, so ist auch
3) **af** = **eg**.

Zieht man nun **ag** und **fe**, so muß, weil **ao** # **eg** nach der Konstruction ist und wegen 3, auch

4) **ag** $\overset{=}{\#}$ **ef** und **afeg** ein Parallelogramm seyn, und es ist demnach
5) △ **efg** = △ **aef**.

Nimmt man von 5 das Dreieck **fhe** weg, so wird

6) △ **efg** — △ **fhe** = △ **aef** — △ **fhe** oder
7) △ **egh** = △ **afh** werden.

Nun ist

8) **abehf** + △ **afh** = △ **abe**, und weil
9) **be** = **ce** gemacht wird, auch
10) △ **abe** = $\frac{1}{2}$ △ **abc**, folglich wenn 10 nach 8 kommt
11) **abehf** + △ **afh** = $\frac{1}{2}$ △ **abc**.

Eben so ist

12) **ahgec** + △ **egh** = △ **ace**, und wegen 9 ist
13) △ **ace** = $\frac{1}{2}$ △ **abc**, folglich wenn 13 nach 12 gebracht wird,
14) **ahgec** + △ **egh** = $\frac{1}{2}$ △ **abc**.

Verbindet man 11 mit 14, so erhält man

15) **abehf** + △ **afh** = **ahgec** + △ **egh**.

Setzt man hier wegen 7 statt △ afh das ihm gleiche △ egh, und statt des △ egh das demselben gleiche △ afh, so erhält man:

16) abehf + △ egh = ahgec + △ afh, oder wenn man statt der Theile das Ganze setzt:

17) abegf = acegf = $\frac{1}{2}$ △ abc.

§. 624.

Wenn bei §. 623. der Punkt o (Fig. 568.) so liegt, daß die von der Spitze a durch ihn gezogene Linie ae auf bc ein Stück ce abschneidet, welches kleiner als be ist, so mache bf = ce, halbire ae in d und ziehe df, es ist dann

abfd = acfd = $\frac{1}{2}$ △ abc.

Denn wenn man af zieht, so ist

1) △ abf = △ ace und wegen der Konstruction
2) △ afd = △ def; hieraus ergibt sich
3) △ abf + △ afd = △ ace + △ def, das ist:
4) abfd = acfd = $\frac{1}{2}$ △ abc.

Liegt aber der Punkt o so im Dreieck abc, daß die durch ihn und durch a gezogene Linie ae in den Halbirungspunkt der bc fällt, so halbirt die ae das Dreieck und es ist dann

△ abe = △ ace.

§. 625.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 569.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus den Dreiecksspitzen gehen und in einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte f zusammentreffen.

Auflösung.

Eine der Dreiecksseiten, etwa bc, theile man in drei gleiche Theile, ziehe durch den ersten Theilpunkt d dieser Seite die de # ab und halbire de in f. Zieht man nun von diesem Halbirungspunkt an die Spitzen des Dreiecks die Linien af, bf und cf, so ist die Theilung des Dreiecks vollzogen: es ist sodann

△ abf = △ acf = △ bcf.

Beweis.

Wenn man ad zieht, so ist, weil de # ab liegt,

1) △ abf = △ abd.

Nun ist aber auch

2) △ abd = $\frac{1}{3}$ △ abc, weil bd ein Drittel der bc ist. Aus 1 und 2 folgt daher:

3) △ abf = $\frac{1}{3}$ △ abc.

Nun ist, weil ef = df gemacht wurde,

4) △ cef = △ cdf, und ferner ist

5) △ aef = △ bdf, wodurch, wenn nämlich 4 zu 5 gethan wird,

6) △ cef + △ aef = △ cdf + △ bdf oder

7) △ acf = △ bcf folgt.

Da nun nach 3 das Dreieck abf das Drittel des Dreiecks abc ist, so muß

8) △ acf + △ bcf = $\frac{2}{3}$ △ abc und folglich wegen 7:

9) △ acf = △ bcf = $\frac{1}{3}$ △ abc seyn.

§. 626.

Aufgabe.

Das Dreieck abc (Fig. 570.) dergestalt in eine beliebige Anzahl gleiche Theile, und zwar so zu zerlegen, daß die Theilungslinien lothrecht auf einer gegebenen Seite bc stehen.

Auflösung.

Das Dreieck soll z. B. in vier gleiche Theile getheilt werden.

Aus dem Scheitel a des der gegebenen Linie bc gegenüber liegenden Winkels fälle man auf bc das Loth ad, beschreibe über bd und cd Halbkreise und theile die Linie bc bei e, f und g in vier gleiche Theile. Aus den gedachten Theilpunkten errichte auf bc die Lothe eh, fl und gm bis an die Peripherie der Halbkreise, ziehe die Linien bh, cl und cm und betrachte sie als Halbmesser, indem man

aus b mit bh den Bogen hq,
aus c mit cl den Bogen lp und
aus c mit cm den Bogen mo

beschreibt. Hierdurch erhält man auf bc die Punkte q, p und o, welche so liegen, daß, wenn man durch sie auf

die bc die Normallinie qv, ps und or zieht, das Dreieck abc nach Verlangen durch diese auf bc stehenden Normale in vier gleiche Theile getheilt ist. Es wird nämlich: $\triangle bqv = avqps = spor = \triangle cor = \frac{1}{4} \triangle abc$ seyn.

Beweis.

Es ist nach der Auflösung

1) $be = ef = fg = cd = \frac{1}{4} bc$,

und weil, wenn dm gezogen wird, das Dreieck cdm rechtwinklig ist, so ist auch

2) $cg : cm = cm : cd$ oder weil

3) $co = cm$ gemacht wurde:

4) $cg : co = co : cd$, woraus

5) $\overline{co}^2 = cg \times cd$ wird.

Da nun $\triangle acd \sim \triangle cor$, so steht:

6) $\triangle cor : \triangle acd = \overline{oc}^2 : cd^2$.

Substituirt man hier den Werth aus 5, so ist

7) $\triangle cor : \triangle acd = cg \times cd : cd^2$ oder

8) $\triangle cor : \triangle acd = cg : cd$.

Da die Dreiecke acd und abc einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien cd und bc, weshalb

9) $\triangle acd : \triangle abc = cd : bc$

stattfindet.

Aus 8 erhält man, wenn man die mittlern Glieder verwechselt:

10) $\triangle cor : cg = \triangle acd : cd$,

und aus 9 wird, wenn man die Vorsätze mit den Nachsätzen verwechselt:

11) $\triangle abc : \triangle acd = bc : cd$,

woraus durch Verwechselung der mittlern Glieder

12) $\triangle abc : bc = \triangle acd : cd$ folgt.

Verbindet man 12 mit 10, so erhält man:

13) $\triangle cor : cg = \triangle abc : bc$, oder wegen 1:

14) $\triangle cor : \frac{bc}{4} = \triangle abc : bc$, woraus

15) $\triangle cor = \frac{1}{4} \triangle abc$ erhalten wird.

Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis für das Dreieck cps, welches $\frac{2}{4} \triangle abc$ ist, und für das Dreieck $bqv = \frac{1}{4} abc$ geführt, woraus denn folgt, daß avqps auch $\frac{1}{4} \triangle abc$ seyn muß.

§. 627.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 571.) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit einer ihrer Lage nach gegebenen außerhalb des Dreiecks liegenden Linie de parallel gehen.

Auflösung.

Das Dreieck abc soll z. B. in drei gleiche Theile getheilt werden.

Durch diejenige Spitze a des Dreiecks abc, welche so liegt, daß eine Parallele durch sie gezogen, innerhalb des Dreiecks abc fällt, ziehe man af # de, wodurch die Segmente bf und cf der Linie bc erhalten werden, über welche man Halbkreise blf und cmf beschreibt. Nun theile man die bc bei g und r in drei gleiche Theile, errichte in diesen Punkten auf bc die Lothe gl und rm und ziehe bl und mc. Wird endlich aus b mit bl der Bogen lp und aus c mit cm der Bogen mf beschrieben und werden durch p und o Parallelen ps und oq mit de gezogen, so ist

$$\triangle bps = psaqo = \triangle coq = \tfrac{1}{3} \triangle abc.$$

Beweis.

Wie der Beweis in §. 626.

§. 628.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 572.) in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite ab parallel gehen.

Auflösung.

Das Dreieck soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Ueber einer Dreiecksseite außer ab, etwa über bc, beschreibe man einen Halbkreis agfc und theile die bc in den Punkten d und e in drei gleiche Theile. Nun errichte man auf bc in diesen Theilpunkten die Perpendikel ef und dg, ziehe sie bis an die Peripherie, ziehe cf und cg und beschreibe aus der Dreiecksspitze, welche derjenigen Seite gegenüber liegt, mit der die Theilungsli-

nien parallel werden ſollen, alſo aus c mit cf und cg die Bogen fh und gl; es ergeben ſich dadurch die Punkte h und l, durch welche man mit ab parallel die Theilungslinien lm und hn zieht, wodurch
△ chn = hlmn = ablm = $\frac{1}{3}$ △ abc wird.

Beweis.

Es iſt der Konſtruction zufolge:
1) ce : cf = cf : bc, oder weil
2) ch = cf gemacht wurde:
3) ce : ch = ch : bc, woraus man
4) $\overline{ch}^2$ = bc × ce erhält.

Da nun nh # ab iſt, ſo muß auch △ cnh ∾ △ abc ſeyn, und folglich

5) △ chn : △ abc = $\overline{ch}^2$: $\overline{bc}^2$

ſtattfinden. Setzt man nun 4 nach 5, ſo wird

6) △ chn : △ abc = bc × ce : $\overline{bc}^2$ oder
7) △ chn : △ abc = ce : bc werden.

Weil nun
8) ce = $\frac{1}{3}$ bc, ſo iſt auch
9) △ chn = $\frac{1}{3}$ △ abc.

Auf ähnliche Art findet man
10) △ clm : △ abc = cd : bc, und weil
11) cd = $\frac{2}{3}$ bc gemacht wurde, ſo wird aus 10:
12) △ clm : △ abc = $\frac{2}{3}$ bc : bc und daher auch
13) △ clm = $\frac{2}{3}$ △ abc.

Nimmt man 9 von 13 weg, ſo iſt
14) △ clm − △ chn = $\frac{2}{3}$ △ abc — $\frac{1}{3}$ △ abc oder
15) hlmn = $\frac{1}{3}$ △ abc; folglich muß
16) ablm = $\frac{1}{3}$ △ abc ſeyn, und es iſt daher bewieſen, daß
17) ablm = hlmn = △ chn = $\frac{1}{3}$ △ abc iſt.

§. 629.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 573.) in einer beliebigen Anzahl gleicher Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem in einer Seite

bc liegenden Punkte d, welcher bestimmt ist, gehen.

Auflösung.

Das Dreieck soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Man theile die Seite, in welcher der Punkt d liegt, in drei gleiche Theile, in e und f, verbinde d mit a und mache eh, so wie fg # ad. Zieht man nun die dh und die dg, so ist

$$\triangle bdh = ahdg = \triangle cdg = \tfrac{1}{3} \triangle abc.$$

Beweis.

Zieht man ae und af, so ist

1) $\triangle dfg = \triangle afg$, und folglich muß auch

2) $\triangle dfg + \triangle cfg = \triangle afg + \triangle cfg$ seyn; das ist aber, wenn man statt der Theile das Ganze nimmt:

3) $\triangle cdg = \triangle acf$.

Nun ist aber

4) $\triangle acf = \tfrac{1}{3} \triangle abc$; daher wird aus 3

5) $\triangle cdg = \tfrac{1}{3} \triangle abc$.

Ganz auf dieselbe Art wird bei der andern Seite des Dreiecks verfahren, wodurch

6) $\triangle bdh = \tfrac{1}{3} \triangle abc$ und folglich auch

7) agdh $= \tfrac{1}{3} \triangle abc$ erhalten wird.

Wäre übrigens das Dreieck in mehr als drei gleiche Theile getheilt worden, so hätte man den Beweis eben so, wie hier geschehen, zu führen.

§. 630.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 574.) dergestalt in mehrere gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte d gehen und eine derselben in die Dreiecksspitze a läuft.

Auflösung.

Das Dreieck soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Man theile die der Spitze a gegenüber liegende Seite bc in drei gleiche Theile, so daß $be = \tfrac{1}{3}$ bc wird; ziehe de und mache af # de und verbinde d mit f. Ferner theile man af bei g in die Hälfte, ziehe cd und

mache gh # cd. Wird nun a mit d und h mit d verbunden, so ist

abfd = cfdh = △ adh = $\frac{1}{3}$ △ abc.

Beweis.

Es ist

1) △ bae = $\frac{1}{3}$ △ abc, und weil
△ afd = △ afe, so ist auch
△ pda = △ pef, und daher wird
abfp + △ pda = abfp + △ pef, oder

2) abfd = △ bae = $\frac{1}{3}$ △ abc werden.

Wird dg und cg gezogen, so ist

3) △ dgo = △ cho, und daher

4) cfdo + △ dgo = cfdo + △ cho oder

5) cgdf = cfdh.

Nun ist

6) cgdf + △ dfg = △ cfg = △ acg und

7) agoh + △ dgo = agoh + △ cho, wenn nämlich zu 3 das Trapez agoh gethan wird.

Aus 7 erhält man

8) agdh = △ acg = △ cfg; folglich wird aus 6 und 8

9) cgdf + △ dfg = agdh.

Ferner ist

10) △ dfg = △ adg, mithin wird aus 9 und 10, wenn man Gleiches von Gleichem nimmt:

11) cgdf + △ dfg — △ dfg = agdh — △ adg oder

12) cgdf = △ adh, woraus wegen 5

13) cfdh = △ adh erhalten wird. Da nun

14) △ abc = abfd + △ adh + cfdh ist, so muß wegen 2 und 13 auch

15) △ abc = $\frac{1}{3}$ △ abc + △ adh + △ adh seyn, woraus

16) $\frac{2}{3}$ △ abc = 2 △ adh oder

17) △ adh = $\frac{1}{3}$ △ abc ist, was zu beweisen war.

Andere Auflösung.

Das Dreieck abc (Fig. 575.) soll in drei gleiche Theile getheilt werden und der Punkt d, welcher innerhalb des Dreiecks liegt, ist gegeben. Von dem gegebenen Punkte d ziehe man nach allen Spitzen des Dreiecks gerade Linien ad, bd und cd. Nun verlängere man irgend eine

Seite, etwa bc, sowohl rechts als auch links, und zwar so weit, daß diese Verlängerung von den mit bd und cd parallel gezogenen Linien ae und af in e und f getroffen wird. Die hierdurch bestimmte Linie ef theile man, da das Dreieck in drei gleiche Theile getheilt werden soll, in drei gleiche Theile bei g und h und ziehe dg und dh, wodurch die Theilung vollzogen und

$$abgd = \triangle dgh = achd = \tfrac{1}{3} \triangle abc$$

wird, wie die Aufgabe verlangt.

Beweis.

Es ist

1) $\triangle bde = \triangle abd$, addirt man hierzu das $\triangle bdg$, so wird

2) $\triangle bde + \triangle bdg = \triangle abd + \triangle bdg$ oder

3) $\triangle deg = abgd$.

Ferner ist

4) $\triangle cdf = \triangle acd$.

Addirt man zu 4 das $\triangle cdh$, so wird

5) $\triangle dfh = achd$.

Addirt man 5 zu 3, so erhält man:

6) $\triangle deg + \triangle dfh = abgd + achd$, und wenn hierzu das $\triangle dgh$ gethan wird:

7) $\triangle deg + \triangle dfh + \triangle dgh = abgd + achd + \triangle dgh$, oder statt der Theile das Ganze:

8) $\triangle def = \triangle abc$. Nun ist aber nach der Konstruction:

9) $\triangle deg = \triangle dgh = \triangle dfh$, folglich auch wegen 3 und 9

10) $abgd = \triangle dgh = achd$.

Und da

11) $\triangle abc = abgd + \triangle dgh + achd$ ist, so folgt

12) $abgd = \frac{1}{3} \triangle abc$,

$\triangle dgh = \frac{1}{3} \triangle abc$ und

$achd = \frac{1}{3} \triangle abc$.

§. 631.

Bei der Theilung der Linie ef (Fig. 575.) kann es sich ereignen, daß ein Theilpunkt i oder mehrere derselben nicht zwischen b und c, sondern außerhalb dieser Linie, zwischen c und f zu liegen kommen. In diesem Falle ziehe man durch i die $ik \# cd$ und ziehe dk, welche dann die Theilungslinie ist, weil

1) $\triangle$ cdk = $\triangle$ cdi, und wenn hierzu $\triangle$ cdh gethan wird:

2) $\triangle$ cdk + $\triangle$ cdh = $\triangle$ cdi + $\triangle$ cdh, oder

3) dkch = $\triangle$ dhi ist.

Nun ist aber nach 5 im vorigen §.

4) achd = $\triangle$ dfh, folglich wenn man 3 von 4 wegnimmt:

5) achd — dkch = $\triangle$ dfh — $\triangle$ dhi, oder

6) $\triangle$ adk = $\triangle$ dif.

Da nun aber nach unserer Annahme

7) $\triangle$ dif = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ def = $\frac{1}{8}$ $\triangle$ abc ist, so muß auch wegen 6 und 7

8) $\triangle$ adk = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ abc

seyn.

§. 632.

Aufgabe.

Ein Dreieck in vier gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien parallel mit den Dreiecksseiten gehen.

Auflösung.

Man fälle von c auf ab (Fig. 576.) das Loth cg, halbire es in h und lege durch h die lm # ab. Wird nun lm in d halbirt und durch d die de # ab und die df # bc gezogen, so ist:

$\triangle$ clm = aedl = $\triangle$ def = bfdm = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ abc.

Beweis.

Es ist

1) $\triangle$ def : $\triangle$ clm = $\left(\frac{cg}{2}\right)^2 : \left(\frac{cg}{2}\right)^2$; folglich muß

2) $\triangle$ def = $\triangle$ clm seyn.

Nun ist ferner

3) $\triangle$ abc : $\triangle$ clm = $cg^2 : \left(\frac{cg}{2}\right)^2$ oder:

4) $\triangle$abc : $\triangle$ clm = $cg^2 : \frac{cg^2}{4}$; und daraus wird

5) $\triangle$ clm = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ abc.

Da nun de # ac und df # bc konstruirt wurde, cd aber = do seyn muß, weil ch = gh ist, und weil lm # ab ist, so ist auch

6) $\triangle clm = \triangle def = \frac{1}{4} \triangle abc$.

Weil ferner d der Halbirungspunkt der lm ist, so haben die Parallelogramme aedl und dfbm gleiche Grundlinien; und da sie überdies von gleicher Höhe sind, so ist

7) aedl = bfdm, woraus denn folgt, daß

8) $aedl = bfdm = \triangle clm = \triangle def = \frac{1}{4} \triangle abc$ ist.

§. 633.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 577.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß die eine Theilungslinie ef mit einer Seite ab parallel geht und daß die andere Theilungslinie do lothrecht auf und zwischen diese Parallelen kommt.

Auflösung.

Von dem Scheitel c des Winkels, welcher der Seite ab gegenüberliegt, mit welcher die eine Theilungslinie parallel gehen soll, fälle man auf die eben erwähnte Seite ab das Loth cg und mache $gci = 30°$; verlängere ab, bis ci in i getroffen wird, trage gi von c nach l und lege durch l die ef # ab; wodurch man das Dreieck $cef = \frac{1}{3} \triangle abc$ erhält.

Nun fälle man von e und f auf ab die Lothe eh und fk und mache

$$ao = \frac{bk + 2hk + 3ah}{4};$$

errichte in o auf ab bis an ef den Perpendikel do, wodurch

$$aedo = bfdo = \frac{1}{3} \triangle abc$$

wird.

Beweis.

Weil $acg = 30°$, so ist

1) $ci : ig = 1 : \sin 30°$ und es wird daher:

2) $ci = \frac{ig}{\sin 30°}$. Da nun aber

3) $\sin 30° = 0{,}5$, so wird aus 2

4) $ci = 2 \cdot ig \cdot$ Und da

5) $cl = ig$ gemacht worden, so ist auch

6) $ci = 2 \cdot cl$. Ferner ist

7) $\overline{cg}^2 = \overline{ci}^2 - \overline{ig}^2$ oder:

8) $\overline{cg}^2 = \overline{4cl}^2 - \overline{cl}^2$ oder:

9) $\overline{cg}^2 = 3cl^2$. Nun steht wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke abc und cef:

10) $\triangle abc : \triangle cef = \overline{cg}^2 : \overline{cl}^2$; das ist wegen 9

11) $\triangle abc : \triangle cef = \overline{3cl}^2 : \overline{cl}^2$ oder

12) $\triangle abc : \triangle cef = 3 : 1$, woraus endlich

13) $\triangle cef = \frac{1}{3} \triangle abc$ hervorgeht.

Nun ist noch zu beweisen daß $aedo = bfdo$ ist. Um dies zu bewerkstelligen, ermittle man den Inhalt der Paralleltrapeze aedo und abfe und untersuche, ob jenes Trapez die Hälfte von diesem ist; in welchem Falle man den Beweis beendet hat.

Es sey der Kürze wegen:

$do = p$, so ist

14) $aode = \frac{1}{2}(ao + de)\, p$ oder

15) $aode = \frac{p}{2}[(bk + 2hk + 3ah) : 4 + ho]$*);

und wenn man gehörig abkürzt:

16) $aode = \frac{p}{8}(bk + 2hk + 3ah + 4ho)$.

Ferner ist

17) $aode = \left(\frac{ah + 2ho}{2}\right) p$; und wenn 16 mit 17 verbunden wird:

18) $\frac{ah + 2ho}{2} = (bk + 2hk + 3ah + 4ho) : 8$,

woraus

---

*) Weil $\frac{aode}{2} = \left(\frac{ah + 2ho}{2}\right)\frac{p}{2}$ und auch

$\frac{aode}{2} = \left(\frac{bk + 2hk + ah}{2 \cdot 2}\right)\frac{p}{2}$ ist, so wird, wenn beide Gleichungen addirt werden:

$\frac{aode}{2} + \frac{aode}{2} = \left(\frac{ah+2ho}{2}\right)\frac{p}{2} + \left(\frac{bk + 2hk + ah}{4}\right)\frac{p}{2}$

oder $aode = \frac{p}{2}[(bk + 2hk + 3ah) : 4 + ho]$.

19) $ho = (bk + 2hk - ah) : 4$

hervorgeht. Trägt man nun den Werth aus 19 nach 16, so erhält man

20) $aode = \frac{p}{8}(bk + 2hk + 3ah + bk - 2hk - ah)$, woraus

21) $aode = \frac{p}{4}(bk + 2hk + ah)$ gefunden wird.

Nun ist aber

22) $abfe = \frac{p}{2}(ab + ef)$ oder

23) $abfe = \frac{p}{2}(bk + hk + ah + hk)$; und

wenn man gehörig abkürzt:

24) $abfe = (bk + 2hk + ah)\frac{p}{2}$.

Aus 21 findet man endlich

25) $\frac{4aode}{p} = bk + 2hk + ah$

und aus 24 folgt:

26) $\frac{2abfe}{p} = bk + 2hk + ah$.

Es muß daher wegen 25 und 26

27) $\frac{4aode}{p} = \frac{2abfe}{p}$ oder

28) $aode = \frac{abfe}{2}$

seyn; was bewiesen werden sollte.

§. 634.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 578.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß zwei Theilungslinien parallel mit zwei Dreiecksseiten gehen und die dritte Theilungslinie aus dem Scheitel der beiden Dreiecksseiten kommt.

Auflösung.

Von dem Scheitel c, in welchen die eine Theilungslinie gehen soll, fälle man auf die demselben gegenüberliegende,

Seite ab, das Loth cg und mache gch = 30°. Nun trage man gh von g nach k und lege durch k die lm # ab. Halbirt man nun lm in d und zieht man cd, ferner de # ac und df # bc, so ist:

acde = bcdf = △def = $\frac{1}{3}$ △abc.

Beweis.

Weil 1) hcg = 30° und weil
2) hg : ch = sin 30° : 1 oder
3) hg : ch = 0, 5 : 1 ist, so wird
4) ch = 2hg und
5) $cg^2 = 4\overline{hg}^2 - \overline{hg}^2$ oder
6) $hg^2 = \frac{1}{3} cg^2$ werden.

Nun ist aber
7) △def ∽ △abc und daher auch
8) △abc : △def = $\overline{cg}^2 : \overline{di}^2$, woraus, weil
9) di = hg und
10) $\overline{di}^2 = \overline{hg}^2$, folglich wegen 6
11) $\overline{di}^2 = \frac{1}{3} cg^2$ ist,
12) △abc : △def = $cg^2 : \frac{1}{3} cg^2$ oder
13) △abc : △def = 3 : 1 wird.

Hieraus erhält man nun
14) △def = $\frac{1}{3}$ △abc.

Da nun 15) dl = dm
gemacht worden, so ist auch
△cql = △cdm und weil lm # ab, ferner de # al und df # bm ist, so folgt:
17) aedl = bfdm. Kommt nun 16 zu 17, so wird
18) aedl + △cdl = bfdm + △cdm oder
19) acde = bcdf
folglich wird aus 14 und 19
20) acde = bcdf = $\frac{1}{3}$ △abc = △def
erhalten; wodurch das zu Beweisende bewiesen ist.

§. 635.

Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Dreieck abc (Fig. 579.) dergestalt in vier gleiche Theile zu theilen, daß eine der Theilungslinien mit der Basis ab pa-

19) $ho = (bk + 2hk - ah) : 4$

hervorgeht. Trägt man nun den Werth aus 19 nach 16, so erhält man

20) $aode = \frac{p}{8}(bk + 2hk + 3ah + bk - 2hk - ah)$, woraus

21) $aode = \frac{p}{4}(bk + 2hk + ah)$ gefunden wird.

Nun ist aber

22) $abfe = \frac{p}{2}(ab + ef)$ oder

23) $abfe = \frac{p}{2}(bk + hk + ah + hk)$; und

wenn man gehörig abkürzt:

24) $abfe = (bk + 2hk + ah)\frac{p}{2}$.

Aus 21 findet man endlich

25) $\frac{4aode}{p} = bk + 2hk + ah$

und aus 24 folgt:

26) $\frac{2abfe}{p} = bk + 2hk + ah$.

Es muß daher wegen 25 und 26

27) $\frac{4aode}{p} = \frac{2abfe}{p}$ oder

28) $aode = \frac{abfe}{2}$

seyn; was bewiesen werden sollte.

§. 634.

Aufgabe.

Ein Dreieck **abc** (Fig. 578.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß zwei Theilungslinien parallel mit zwei Dreiecksseiten gehen und die dritte Theilungslinie aus dem Scheitel der beiden Dreiecksseiten kommt.

Auflösung.

Von dem Scheitel **c**, in welchen die eine Theilungslinie gehen soll, fälle man auf die demselben gegenüberliegende,

Seite ab, das Loth cg und mache gch = 30°. Nun trage man gh von g nach k und lege durch k die lm # ab. Halbirt man nun lm in d und zieht man cd, ferner de # ac und df # bc, so ist:

acde = bcdf = △def = $\frac{1}{3}$ △abc.

Beweis.

Weil 1) hcg = 30° und weil
2) hg : ch = sin 30° : 1 oder
3) hg : ch = 0, 5 : 1 ist, so wird
4) ch = 2hg und
5) $\overline{cg}^2 = 4\overline{hg}^2 - \overline{hg}^2$ oder
6) $hg^2 = \frac{1}{3} cg^2$ werden.

Nun ist aber
7) △def ∽ △abc und daher auch
8) △abc : △def = $\overline{cg}^2 : \overline{di}^2$, woraus, weil
9) di = hg und
10) $\overline{di}^2 = \overline{hg}^2$, folglich wegen 6
11) $\overline{di}^2 = \frac{1}{3} cg^2$ ist,
12) △abc : △def = $cg^2 : \frac{1}{3} cg^2$ oder
13) △abc : △def = 3 : 1 wird.

Hieraus erhält man nun
14) △def = $\frac{1}{3}$ △abc.

Da nun 15) dl = dm
gemacht worden, so ist auch
△cql = △cdm und weil lm # ab, ferner de # al und df # bm ist, so folgt:
17) aedl = bfdm. Kommt nun 16 zu 17, so wird
18) aedl + △cdl = bfdm + △cdm oder
19) acde = bcdf
folglich wird aus 14 und 19
20) acde = bcdf = $\frac{1}{3}$ △abc = △def
erhalten; wodurch das zu Beweisende bewiesen ist.

§. 635.

Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Dreieck abc (Fig. 579.) dergestalt in vier gleiche Theile zu theilen, daß eine der Theilungslinien mit der Basis ab pa-

rallel geht, die andere aber darauf lothrecht steht.

Auflösung.

Von der Spitze c fälle man auf die Basis ab des Dreiecks die Normale cd und mache ed = cd, ziehe ce, halbire diese Linie in f und mache cg = cf. Wird nun durch g die hi # ab gelegt, so ist die Theilung nach Verlangen vollzogen, denn es ist

$$\triangle cgh = \triangle cgi = adgh = bdgi.$$

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) cd = de und daher auch

2) $\overline{ce}^2 = 2\overline{cd}^2$.

Ferner wurde gemacht:

3) $\frac{ce}{2} = cf$, woraus

4) $\overline{ce}^2 = 4\overline{cf}^2$ wird. Nun ist

5) cf = cg gemacht worden, folglich muß, wenn 5 nach 4 gesetzt wird,

6) $\overline{ce}^2 = 4\overline{cg}^2$ werden.

Verbindet man 2 mit 6, so erhält man:

7) $2\overline{cd}^2 = 4\overline{cg}^2$ oder

8) $\overline{cd}^2 = 2\overline{cg}^2$.

Nun steht wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke acd und cgh:

9) $\triangle acd : \triangle cgh = \overline{cd}^2 : \overline{cg}^2$: oder wenn hierein 8 gesetzt wird:

10) $\triangle acd : \triangle cgh = 2cg^2 : cg^2$ oder

11) $\triangle acd : \triangle cgh = 2 : 1$; woraus denn folgt, daß

12) $\triangle egh = \frac{1}{2} \triangle acd = adgh$ ist. Da nun aber wegen der Auflösung

13) $\triangle acd = \frac{1}{2} \triangle abc$ ist, so muß

14) $\triangle cgh = adgh = \frac{1}{4} \triangle abc$ und folglich auch

15) $\triangle cgi = bdgi = \frac{1}{4} \triangle abc$ seyn; was zu beweisen war.

§. 636.

Aufgabe.

Von dem Dreieck abc (Fig. 580) soll ein Dreieck abgeschnitten werden, welches so groß

ist, wie ein gegebenes Dreieck dek und dessen Spitze in eine der Spitzen des Dreiecks abc fällt.

Auflösung.

Durch die Spitze e des Dreiecks dek lege man ef # kd, mache den Winkel kdf = c, trage df von c nach h, mache ci = dk und ziehe hi. Hierdurch ist

△chi = △dfk = dek geworden.

Will man etwa, daß die Seite des gefundenen Dreiecks chi aus der Spitze b gehen soll, so ziehe man bh und mache gi # bh; ziehe endlich bg und es ist

△bcg = △dek.

Beweis.

Weil fe # dk, so ist

1) △dkf = △dek; weil ferner
2) ch = df
   ci = dk und
   fdk = c gemacht wurde, so muß
3) △chi = △dfk seyn. Nun ist aber auch
4) △bio = △goh, folglich auch
5) △bio + cgoi = △goh + cgoi oder
6) △bcg = △chi.

Und wegen 3 und 6 ist endlich:

7) △bcg = △dfk.

Andere Auflösung.

Man fälle von c auf ab (Fig. 583.) und von e auf bd die Lothe cg und ef und suche zu cg, ef und bd die vierte Proportionale bh (§. 203.). Zieht man nun ch, so ist

△bch = △bde.

Beweis.

Weil 1) cg : ef = bd : bh, so ist auch
2) cg × bh = bd × ef; woraus
3) $\frac{cg \times bh}{2} = \frac{bd \times ef}{2}$ wird. Da nun

aber 4) $\frac{cg \times bh}{2}$ = △bch und

5) $\frac{bd \times ef}{2}$ = △bde ist, so wird, wenn 4 und 5 nach 3 gesetzt wird:

6) △bch = △bde.

§. 637.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke abc (Fig. 581.) ein Dreieck abzuschneiden, welches dem gegebenen Dreiecke ähnlich und einem andern Dreiecke cde gleich ist.

Auflösung.

Man fälle von a auf bc und von e auf cd die Lothe af und eg, suche zu af und cb eine mittlere Proportionale hi (§. 200.); dann eine dergleichen ml zwischen cd und ed; und endlich suche man zu hi, lm und ab die vierte Proportionale an (§. 203.). Macht man nun no ∥ bc, so ist

$\triangle ano = \triangle cde$ und es ist aber auch

$\triangle ano \sim \triangle abc$.

Beweis.

Es ist

1) $hi : lm = ab : an$ oder auch

2) $\overline{hi}^2 : \overline{lm}^2 = \overline{ab}^2 : an^2$. Weil nun

3) $bc : hi = hi : af$ nach der Konstruction ist, so muß auch

4) $\overline{hi}^2 = bc \times af$ seyn.

Ferner ist ebenfalls nach der Konstruction:

5) $cd : lm = lm : eg$, folglich auch

6) $\overline{lm}^2 = cd \times eg$. Nun ist

7) $\triangle abc \sim \triangle ano$ gemacht worden, folglich steht:

8) $\triangle abc : \triangle ano = ab : an$.

Trägt man nun 4, 6 und 8 nach 2, so wird

9) $bc \times af : cd \times eg = \triangle abc : \triangle ano$ oder

10) $\frac{bc \times af}{2} : \frac{cd \times eg}{2} = \triangle abc : \triangle ano$.

Nun ist aber

11) $\frac{bc \times af}{2} = \triangle abc$ und

12) $\frac{cd \times eg}{2} = \triangle cde$; folglich wird aus 10 wegen 11 und 12:

13) △abc : △cde = △abc : △ano oder
14) △ano = △cde werden

§. 638.

Aufgabe.

Von dem Dreiecke abc (Fig. 582.), in dessen einer Seite bc ein Punkt g gegeben ist, soll ein anderes kleines Dreieck def dergestalt abgeschnitten werden, daß die Theilungslinie aus einem Punkte g geht, welcher in einer Seite bc liegt.

Erste Auflösung.

Den Winkel dfh mache man = b, ziehe durch e die eh # df; trage df von b nach k, fh von b nach i, ziehe gi, das heißt man verbinde den gegebenen Punkt g mit i und mache kl # gi. Zieht man nun gl, so ist

△bgl = △def.

Beweis.

Weil eh # df, so ist

1) △dfh = △def; und weil bi = fh und bk = df gemacht wurde, übrigens hfd = b ist, so muß, wenn man ik zieht
2) △bik = △dfh seyn. Nun ist, da kl # gi, auch
3) △ilm = △gkm; folglich auch
4) △ilm + bkml = △gkm + bkml oder
5) △bik = △bgl.

Wird endlich 5 mit 2 verbunden, so ist

6) △dfh = △bgl und wegen 1 und 6 ist:
7) △def = △bgl.

Andere Auflösung.

Ist abc (Fig. 584.) das gegebene Dreieck und l der in ab liegende Punkt, so fälle man von c auf ab und von e auf df die Höhen cg und ef. Nun suche man zu cg, ef und bd die vierte Proportionale (§. 203.), trage sie von b nach h, nämlich auf dieselbe Seite ab, in welcher der Punkt l liegt, ziehe ch und mache hk # cl. Wird nun l mit k verbunden, so ist

△bkl = △bde.

Beweis.

Weil 1) cg : ef = bd : bh gemacht wurde, so ist auch

2) $cg \times bh = ef \times bd$ oder

3) $\frac{cg \times bh}{2} = \frac{ef \times bd}{2}$; das ist, wenn man ch zieht:

4) $\triangle bch = \triangle bde$; und weil $hk \# cl$ ist, so muß auch

5) $\triangle bkl = \triangle bch$ oder wegen 4:

6) $\triangle bkl = \triangle bde$ seyn.

Dritte Auflösung.

Von c (Fig. 585.) fälle man auf ab ein Loth cg und von e auf bd ein Loth ef, mache $gi = ef$, lege durch i die $ik \# ab$ und mache $bl = bd$. Zieht man nun kl, so ist

$$\triangle bkl = \triangle bde.$$

Ist nun h der in ab gegebene Punkt, so ziehe man hk, mache $lm \# hk$ und ziehe hm: es ist sodann

$$\triangle bhm = \triangle bkl = \triangle bde.$$

Der Beweis

wird wie bei der zweiten Auflösung geführt.

§. 639.

Aufgabe.

Einen innerhalb eines Dreiecks abc (Fig. 586.) liegenden Punkt h zu finden, aus welchem das Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Auflösung.

Das Dreieck soll in vier gleiche Theile getheilt werden. Man theile eine Seite ac in vier gleiche Theile und ziehe durch den ersten Theilpunkt die $dh \# ab$. Ferner theile man die an dem ersten Theile ad liegende Seite ab auch in vier gleiche Theile und lege auch hier durch den ersten Theilpunkt e eine Linie $eg \# ac$; der Durchschnittspunkt h dieser Parallelen ist der gesuchte Punkt. Dann zieht man aus ihm nach den Dreiecksspitzen a, b und c die Linie ah, bh und ch, so ist

$$\triangle abh = \triangle ach = \tfrac{1}{4} \triangle abc.$$

Nun halbire man die noch nicht in die Konstruction genommene Seite bc bei i und ziehe hi: es ist sodann

$$\triangle bhi = \triangle chi = \tfrac{1}{4} \triangle abc.$$

Beweis.

Weil

1) $ad = \frac{1}{4} ac$ gemacht wurde und $dh \# ab$ ist, so muß

2) $\triangle abh = \frac{1}{4} \triangle abc$ seyn. Ganz aus demselben Grunde muß aus

3) $\triangle ach = \frac{1}{4} \triangle abc$ seyn. Da nun übrigens bc in i halbirt wurde, so ist auch

4) $\triangle bhi = \triangle chi$. Und weil

5) $bch = \triangle bhi + \triangle chi = \frac{1}{2} \triangle abc$ ist, so muß auch wegen 4

6) $\triangle bhi = \triangle chi = \frac{1}{4} \triangle abc$ seyn *).

§. 640.

Aufgabe.

Es ist ein Dreieck abc (Fig. 587.) gegeben; man soll in einer seiner Seiten ab einen Punkt d finden, aus welchem das Dreieck in jede beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Auflösung.

Das Dreieck soll in vier gleiche Theile getheilt werden.

Man theile die Seite ab, in welcher der Punkt d bestimmt werden soll, in vier gleiche Theile und ziehe von dem ersten Theilpunkte d nach der demselben gegenüberliegenden Dreiecksspitze c die cd. Nun theile man die dem Punkte d gegenüberliegende Seite bc, in 4—1, das ist in 3 gleiche Theile, bei e und f und ziehe de und df: es ist dadurch das Dreieck abc nach Verlangen getheilt.

Beweis.

Weil 1) $ad = \frac{1}{4} ab$, so ist auch

2) $\triangle acd = \frac{1}{4} \triangle abc$ und folglich muß

---

*) Hätte man bei dieser Aufgabe das Dreieck abc (Fig. 586.) in 5, 6, 7.... n Theile theilen sollen, so würde man die ac und ab in 5, 6, 7.... n gleiche Theile haben theilen müssen, um, wenn durch die ersten Theilpunkte d und e die $ch \# ab$ und die $eg \#$ wäre gezogen worden, den Punkt h zu erhalten. In diesem Falle muß aber die Seite bc in 3, 4, 5..... oder allgemein: in (n — 2) Theile getheilt werden.

3) $\triangle bcd = \frac{3}{4} \triangle abc$ seyn. Nun ist
4) $be = ef = cf = \frac{1}{3} bc$; folglich muß auch
5) $\triangle bde = \triangle def = \triangle cdf = \frac{1}{3} \triangle bcd$ seyn.
Trägt man nun 3 nach 5, so wird
6) $\triangle bde = \triangle def = \triangle cdf = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \triangle abc$ oder
7) $\triangle bde = \triangle def = \triangle cdf = \frac{1}{4} \triangle abc$
werden.

§. 641.

Wenn die vorstehende Aufgabe etwa verlangt, daß das Dreieck in n gleiche Theile getheilt werden soll, so theile man die ab (Fig. 587.) in n gleiche Theile und verbinde c mit dem ersten Theilpunkte d. Hierauf theile man bc in (n—1) gleiche Theile und verfahre, wie §. 640 gelehrt wurde.

§. 642.

Aufgabe.

Man soll innerhalb eines Dreiecks abc (Figur 588.) einen Punkt p bestimmen, welcher so liegt, daß die von demselben an die Dreiecksspitzen gezogenen Linien ap, bp und cp das Dreieck abc dergestalt in drei Dreiecke bcp, abp und acp zerlegen, welche sich wie drei gegebene Zahlen, etwa wie 5 : 4 : 3 verhalten.

Auflösung.

Man theile eine Dreiecksseite ab in drei Theile be, de und ad, welche sich wie die Zahlen 5, 4 und 3 zu einander verhalten (§. 3.), ziehe durch d die $df \# ac$ und durch e die $eg \# bc$. Hierdurch erhält man in dem Durchschnittspunkte p der beiden Linien df und eg den verlangten Punkt, welcher so liegt, daß, wenn von demselben die ap, bp und cp gezogen wird,

$\triangle bcp : \triangle abp : \triangle acp = 5 : 4 : 3$ ist.

Beweis.

Wenn man ef, af, ec, af und dc zieht, so ist, weil $eg \# bc$ gemacht wurde:

1) $\triangle bce = \triangle bcp$.

Aus demselben Grunde ist auch

2) $\triangle acd = \triangle acp$.

Da nun die Dreiecke adf und bef einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie deren Grundlinien und folglich wird

3) $\triangle adf : \triangle bef = 3 : 5$

seyn. Weil sich nun der eben angeführten Gründe wegen

4) $\triangle bce : \triangle acd = 5 : 3$

verhält, so wird, wenn 1 und 2 nach 4 gesetzt werden,

5) $\triangle bcp : \triangle acp = 5 : 3$

seyn. Nun hat aber folgende identische Gleichung ihre Richtigkeit:

6) $\triangle bcp + \triangle acp + \triangle abp = \triangle bce + \triangle acd + \triangle cde$; woraus, wenn 1 und 2 hierein gebracht wird:

7) $\triangle bcp + \triangle acp + \triangle abp = \triangle bcp + \triangle acp + \triangle cde$ hervorgeht und nach gehöriger Abkürzung

8) $\triangle abp = \triangle cde$ gibt.

Weil die Dreiecke **bce**, **cde** und **acd** einerlei Höhe haben, so muß

9) $\triangle bce : \triangle cde = \triangle acd = 5 : 4 : 3$

seyn; woraus, wenn man 1, 8 und 2 substituirt:

10) $\triangle bcp : \triangle abp : \triangle acp = 5 : 4 : 3$

erhalten wird.

§. 643.

Aufgabe.

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck **abc** (Figur 589.) und eine gerade Linie **af** gegeben, man soll auf der Verlängerung der Kathete **ab** einen Punkt **d** bestimmen, der so liegt, daß, wenn man durch denselben die **de** # **ac** zieht, und die Hypothenuse **bc** bis **e** verlängert, das dadurch entstandene Paralleltrapez **aced** dem über der Linie **af** konstruirten Quadrat ($\overline{af^2}$) gleich ist.

Auflösung.

Man verlängere beide Katheten, mache $ag = 2af$, suche zu **ac**, **af** und **ag** die vierte Proportionale (§. 203.) und trage sie von **a** nach **h**. Jetzt beschreibe man über **bh** einen Halbkreis **boh**, ziehe **bo** und mache $bd = bo$. Hierdurch erhält man in **bh** den Punkt **d**, welcher so liegt, daß, wenn man **bc** verlängert und in **d** auf **bh** die Normale **de** errichtet,

$aced = \overline{af^2}$ wird.

Beweis.

Es ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke **abc** und **bde**

1) $\triangle abc : \triangle bde = \overline{ab^2} : \overline{bd^2}$.

Und weil $bd = bo$ gemacht wurde, so steht nach der Konstruction:

2) $bh : bd = bd : ab$, woraus

3) $\overline{bd}^2 = ab \times bh$ wird.

Setzt man 3 nach 1, so erhält man:

4) $\triangle abc : \triangle bde = \overline{ab}^2 : ab \times bh$ oder

5) $\triangle abc : \triangle bde = ab : bh$.

Hieraus bekommt man ferner:

6) $(\triangle bde - \triangle abc) : \triangle abc = (bh - ab) : ab$;

und wenn man abkürzt:

7) $aced : \triangle abc = ah : ab$.

Da nun

8) $\triangle abc = \frac{ab \times ac}{2}$ ist und aus 7

9) $aced : \triangle abc = ah \times \frac{ac}{2} : ab \times \frac{ac}{2}$ wird,

so muß, wenn 8 nach 9 kommt:

10) $aced : \triangle abc = \frac{ah \times ac}{2} : \triangle abc$ und folglich

11) $aced = \frac{ah \times ac}{2}$ werden.

Nach der Konstruction ist endlich:

12) $ac : af = ag : ah$, und weil

13) $ag = 2 \cdot af$ gemacht wurde, so folgt, wenn man 13 nach 12 setzt:

14) $ac : af = 2af : ah$; woraus

15) $ac \times ah = 2\overline{af}^2$

wird. Setzt man nun 15 nach 11, so ergibt sich:

16) $aced = \frac{2 \cdot \overline{af}^2}{2}$ oder

17) $aced = \overline{af}^2$: was zu beweisen war.

§. 644.

Aufgabe.

Ein Dreieck aus einem innerhalb desselben zu bestimmenden Punkte so in drei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien in die Dreiecksspitzen gehen.

Auflösung.

Man halbire zwei Seiten ac und bc (Fig. 590.) in e und d und verbinde diese Halbirungspunkte mit den

Scheiteln b und a der gegenüber liegenden Dreieckswinkel durch die Linien be und ad, welche sich in o schneiden. Zieht man nun von o die ao, die bo und die co, so ist

$$\triangle abo = \triangle bco = \triangle aco = \frac{1}{3} \triangle abc.$$

Beweis.

Weil ac in e und bc in d halbirt ist, so muß

1) bo : be = 2 : 3 *) seyn und daher

2) $\triangle boc : \triangle bec = bo : be = 2 : 3$ werden.

Nun ist aber

3) $\triangle bec = \frac{1}{2} \triangle abc$, folglich muß, wenn 3 nach 2 gebracht wird

4) $\triangle boc : \frac{1}{2} \triangle abc = 2 : 3$ seyn, weshalb auch

5) $\triangle boc = \frac{1}{3} \triangle abc$ ist.

Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daß

6) $\triangle aoc = \frac{1}{3} \triangle abc$ und

7) $\triangle aob = \frac{1}{3} \triangle abc$ ist.

§. 645.

Verlängert man die co (Fig. 590.) bis f, so ist das $\triangle abc$ in sechs gleich große Dreiecke aof, bof, bdo, cdo, ceo und aeo zerlegt und man könnte daher auch hierzu eine Aufgabe bilden, zu deren Auflösung der Beweis des §. 644 gehört.

§. 646.

Aufgabe.

Von einem rechtwinkligen Dreieck abc (Figur 591.) ein demselben ähnliches Dreieck ade

*) Der Beweis, daß bo : be = 2 : 3 ist, wird auf folgende Art geführt: es ist, wenn man de (Fig. 590) zieht,

1) cd : bc = 1 : 2 und auch

2) ce : ca = 1 : 2, und da c den Dreiecken cde und abc gemeinschaftlich ist, so muß auch $\triangle cde \backsim \triangle abc$ und demnach

3) de ∥ ab seyn; weshalb auch, weil ac in e halbirt ist,

4) de : ab = 1 : 2 seyn muß. Weil nun auch

5) aob = eod und

6) bed = abe wegen 4 ist, so sind auch die Dreiecke abo und doe ähnlich; weshalb

7) eo : bo = de : ab steht. Substituirt man hier den Werth aus 4, so ist

8) eo : bo = 1 : 2. Nun ist aber auch

9) bo : (eo + bo) = 2 : (1 + 2), das ist:

10) bo : be = 2 : 3.

so abzuschneiden, daß das Rechteck bdef, welches unter der Kathete de und dem Unterschiede bd der Katheten ab und ad konstruirt ist, dem Dreieck ade gleich ist.

Auflösung.

Man theile die Kathete ab in drei gleiche Theile und nehme von der Spitze a bis d zwei Theile, d. h. man mache $ad = \frac{2}{3} ab$. Zieht man nun $de \# bc$ und ef normal auf bc, so ist

$$\triangle ade = bdef.$$

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) $bd = \frac{ab}{3}$ und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ade und abc steht:

2) $de : bc = ad : ab$; woraus man

3) $de = \frac{bc \times ad}{ab}$ erhält. Nun ist aber

4) $bdef = de \times bd$, folglich wegen 3 und 1:

5) $bdef = \frac{bc \times ad}{ab} \times \frac{ab}{3}$ oder

6) $bdef = \frac{bc \times ad}{3}$. Nun ist aber auch

7) $\triangle ade = \frac{ad \times de}{2}$; folglich muß, weil

8) $ad = \frac{2}{3} ab$ ist und wenn 3 nach 7 kommt:

9) $\triangle ade = \frac{2}{3} ab \times \frac{bc \times ad}{ab} : 2$ oder

10) $\triangle ade = \frac{\frac{bc \times ad}{3}}{}$ werden. Aus 6 und 9 folgt endlich, daß

11) $\triangle ade = bdef$ ist.

§. 647.

Aufgabe.

Ein Dreieck dergestalt durch Rechnung zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite des Dreiecks parallel gehen.

Auflösung.

Das Dreieck abc (Fig. 592.) ist in n gleiche Theile zu theilen und die Theilungslinien sollen mit ac parallel

werden. Man bestimme die Höhe **bd**. Nun quadrire man diese Höhe und theile das Quadrat durch eine Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als das gegebene Dreieck Theile erhalten soll: hier also durch **n**. Zieht man nun aus dem Quotient die Wurzel, so ist diese die Höhe des ersten Theils, welche von der Spitze **b** auf **bd** bis **e** getragen wird. Zieht man nun durch **e** die **om** # **ac**, so ist

$$\triangle \mathbf{bom} = \tfrac{1}{n} \triangle \mathbf{abc}.$$

Auf dieselbe Art verfährt man bei Bestimmung der übrigen Punkte **f**, **g** ꝛc. in **bd**.

Beweis.

Es ist 1) $\frac{\mathbf{be} \times \mathbf{om}}{2} : \frac{\mathbf{bd} \times \mathbf{ac}}{2} = \overline{\mathbf{be}}^2 : \overline{\mathbf{bd}}^2$, weil

$$\frac{\mathbf{be} \times \mathbf{om}}{2} = \triangle \mathbf{bom} \text{ und}$$

$$\frac{\mathbf{bd} \times \mathbf{ac}}{2} = \triangle \mathbf{abc} \text{ ist.}$$

Ferner muß daher

2) $\triangle \mathbf{bom} : \triangle \mathbf{abc} = \overline{\mathbf{be}}^2 : \overline{\mathbf{bd}}^2$ seyn.

Da nun das Dreieck **bom** irgend ein Theil, z. B. $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ von dem gegebenen Dreieck **abc** seyn muß, so ist auch 3) $\triangle \mathbf{bom} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \triangle \mathbf{abc}$ und aus 2 wird daher

4) $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \triangle \mathbf{abc} : \triangle \mathbf{abc} = \overline{\mathbf{be}}^2 : \mathbf{bd}^2$ werden.

Bestimmt man nun hieraus die Höhe des Dreiecks **bom**, so wird 5) $\mathbf{be} = \mathbf{bd} \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}$ werden.

Beispiel.

Ein Dreieck **abc**, dessen Basis 60′ und dessen Höhe 30′, in vier gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit der Basis parallel gehen.

Auflösung.

Nach 5 der Auflösung ist

$\mathbf{be} = \mathbf{bd} \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}}$ und weil $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \frac{1}{4}$ seyn muß, so ist auch

$\mathbf{m} = 1$, $\mathbf{n} = 4$ und $\mathbf{bd} = 30$, weshalb

$be = 30 \sqrt{\frac{1}{4}}$ oder
$be = 15'$ wird.

Um nun die Höhe bf des andern Theils zu bestimmen, muß man $\frac{m}{n} = \frac{2}{4}$ oder

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2},$$

folglich $m = 1$ und $n = 2$ setzen, weshalb
$bf = 30 \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird.

Um bg zu erhalten, muß

$\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$ seyn; daher ist
$m = 3$ und $n = 4$; weshalb
$bg = 30 \sqrt{\frac{3}{4}} = 15 \sqrt{3}$ wird und wodurch die Theilung beendet ist.

§. 648.

Aufgabe.

An einer Dreiecksseite die Punkte durch Rechnung zu bestimmen, durch welche die Theilungslinien, die mit einer andern Seite des Dreiecks parallel seyn sollen, gehen werden, damit dadurch das Dreieck in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt werde.

Auflösung.

Diejenige Seite, etwa ab (Fig. 593.), mit welcher die Theilungslinien nicht parallel gehen sollen, theile man in so viel gleiche Theile, als deren das gegebene Dreieck erhalten soll. Nun suche man zu dem ersten Theile be und zu der ganzen Seite ab die mittlere Proportionale bh, welche den ersten Theilpunkt h bestimmt, durch den man eine Parallele hi mit ae zieht.

Nun suche man zum ersten und zweiten Theile ed, nämlich zu db und ab wiederum eine mittlere Proportionirte bg (§. 200.) und trage sie von b nach g, wodurch der andere Punkt g in ab bestimmt ist, durch welchen die andere Theilungslinie gk mit ac parallel gezogen wird.

Auf diese Art fährt man fort, so viel Proportionallinien zu bestimmen, bis die Figur dadurch nach Verlangen getheilt ist.

Beweis.

Weil 1) $be : bh = bh : ab$ gesetzt wurde, so ist auch

2) $bh = \sqrt{be \times ab}$.

Da nun, wenn das Dreieck z. B. in drei gleiche Theile getheilt werden soll

3) $be = \frac{1}{3} ab$ ist, so wird

4) $bh = ab \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Weil nun die Seite bh des abgeschnittenen Dreiecks bhi gefunden ist, so muß auch

5) die Höhe des Dreiecks $= p \sqrt{\frac{1}{3}}$ seyn, wenn man nämlich die Höhe des Dreiecks abc durch p bezeichnet. Nun sind aber die Dreiecke bhi und abc ähnlich, folglich muß

6) $\triangle bhi : \triangle abc = (p\sqrt{\frac{1}{3}})^2 : p^2$ oder

7) $\triangle bhi : \triangle abc = \frac{p^2}{3} : p^2$ seyn, woraus

8) $\triangle bhi = \frac{1}{3} \triangle abc$ wird.

Für das Dreieck bgk wird der Beweis eben so geführt, doch muß hier $bd = \frac{2}{3} ab$ statt be in die Proportion zur Bestimmung der bg gebracht werden.

§. 649.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 594.) dergestalt durch Rechnung zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem in einer Seite ab liegenden und bestimmten Punkte d gehen und daß ferner die Theile des Dreiecks zum Ganzen ein bestimmtes Verhältniß haben.

Auflösung.

Es soll z. B. von dem Dreieck abc ein Dreieck bde abgeschnitten werden, welches sich zu jenem wie $n : m$ verhält, so daß

$$\triangle abc : \triangle bde = m : n$$

ist; so bestimme man, da d, folglich auch die bd gegeben ist, be.

Es sey der Kürze wegen

$ab = a$,
$bc = b$,
$ac = c$,

$bd = d$ und
$be = x$,

so ist, weil sich zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, wie die Punkte der diesen Winkeln zugehörenden Schenkel verhalten *).

1) $\triangle abc : \triangle bde = ab \times bc : bd \times be$ oder
2) $\triangle abc : \triangle bde = a \times b : d \times x$.

Da nun

3) $\triangle abc : \triangle bde = m : n$ seyn soll, so erhält man, wenn 2 und 3 verbunden werden:

4) $m : n = (a \times b) : (d \times x)$, woraus

5) $x = \frac{a \cdot b \cdot n}{d \cdot m}$ wird.

Findet es sich, daß x nämlich $be > bc$ wird, so kann die Theilungslinie de die Seite bc nicht treffen: sie muß in die andere Seite ac fallen, etwa wie df. Man bestimme daher af, welches der Kürze wegen durch y bezeichnet werden mag.

Nun ist aus obigem Grunde:

1) $\triangle abc : \triangle adf = (ab \times ac) : (ad \times af)$ oder
2) $\triangle abc : \triangle adf = (a \times c) : (a - d)\, y$.

Nach der Aufgabe ist indeß

3) $\triangle abc : bdfc = m : n$ und hieraus folgt:
4) $\triangle abc : (\triangle abc - bdfc) = m : (m - n)$ oder
5) $\triangle abc : \triangle adf = m : (m - n)$.

Verbindet man 2 mit 5, so ergibt sich

6) $(a \times c) : (a - d)\, y = m : (m - n)$,

---

*) Weil aus zwei Seiten a und b und dem von denselben eingeschlossenen Winkel α der Flächeninhalt F eines Dreiecks durch folgende Formel gefunden wird:

$$F = \frac{a\,b}{2} \sin \alpha,$$

so muß der Inhalt f eines andern Dreiecks, dessen Seiten c und d nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α gegeben sind, folgender seyn:

$$f = \frac{c\,d}{2} \sin \alpha.$$

Daher muß die identische Proportion:

$$F : f = \frac{a\,b}{2} \sin \alpha : \frac{c\,d}{2} \sin \alpha$$

stattfinden, woraus

$$F : f = a \times b : c \times d$$

hervorgeht und welcher Satz oben angewendet wurde.

woraus man

$$7)\ y = \frac{a\,c\,(m-n)}{m\,(a-d)}$$

erhält.

Beispiel.

Von dem Dreieck abc soll ein Dreieck bde abgeschnitten werden, welches sich zu jenem wie 7 : 48 verhält.

Wenn nun $ab = a = 74$,
$bc = b = 47$,
$ac = c = 68$ und
$bd = d = 19{,}3$
ist, wie groß wird be werden müssen?

Auflösung.

Es ist $be = \frac{a \cdot b \cdot n}{d \cdot m}$,

folglich wird

$$be = \frac{74 \times 47 \times 7}{19{,}3 \times 48}, \text{ oder}$$

$$be = 61{,}3284\ldots$$

Soll aber von dem Dreieck abc ein Drittel weggenommen werden, so fällt der Theilpunkt auf ac und es ist, weil

$m = 3$,
$n = 1$

ist, wegen:

$$af = \frac{a\,c\,(m-n)}{m\,(a-d)}$$

$$af = \frac{68 \times 74\ (3-1)}{3\ (74-19{,}3)}, \text{ woraus}$$

$$af = 61{,}3284$$

wird.

§. 650.

Aufgabe.

Ein Dreieck abc (Fig. 595.) dergestalt in ngleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien von einem außerhalb des Dreiecks liegenden Punkte d gehen.

Auflösung.

Es sey $ab = a$,
$ac = b$,
$bc = c$, und die Entfernung des Punktes d von b, nämlich
$bd = h$;
ferner $abd = \varphi$,
$abc = \alpha$ und
$cbd = \beta$ gegeben.

Gesucht wird:
$bf = x$.

Nach der Aufgabe soll

1) $\Delta\ bef = \frac{1}{n} \Delta\ abc$ gemacht werden.

Nun ist

2) $\Delta\ bef = \frac{1}{2} bf \times be \cdot \sin \alpha$, und

3) $\Delta\ abc = \frac{1}{2} ab \times bc \sin \alpha$. Setzt man 3 nach 1, so wird

4) $\Delta\ bef = \frac{1}{2} \frac{ab \times bc \cdot \sin \alpha}{n}$, und wenn 2 mit 4 verbunden wird:

5) $\frac{bf \times be \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{ab \times bc \cdot \sin \alpha}{2n}$, oder wenn hier die anfänglich festgesetzte Bezeichnung angewendet wird:

6) $\frac{x \cdot be \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a \cdot c \sin \alpha}{2n}$, das ist

7) $x \cdot be = \frac{a \cdot c}{n}$, woraus

8) $be = \frac{ac}{xn}$ erhalten wird. Nun ist

9) $\Delta\ bef = \Delta\ bdf - \Delta\ bde = \frac{1}{n} \Delta\ abc$, oder weil

10) $\Delta\ bdf = \frac{bf \times bd \cdot \sin \varphi}{2}$ und

11) $\Delta\ bde = \frac{bd \times be \sin \beta}{2}$ ist:

12) $\Delta bef = \frac{bf \times bd \cdot \sin \varphi}{2} - \frac{bd \times be \sin \beta}{2}$.

Es ist aber auch

$$13)\ \Delta\ bef = \frac{1}{n}\ \Delta\ abc = \frac{a \cdot c \cdot \sin\alpha}{2n};$$

folglich wenn man 12 und 13 verbindet und die oben festgesetzten Bezeichnungen anwendet:

$$14)\ \frac{x \cdot h \sin\varphi}{2} - \frac{be \cdot h \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a \cdot c \sin\alpha}{2n},$$

oder wegen 8, und wenn man mit 2 multiplicirt:

$$15)\ x \cdot h \cdot \sin\varphi - \frac{a \cdot c \cdot h \sin\beta}{x \cdot n} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\alpha}{n},$$

woraus

$$16)\ x = (a \cdot c \sin\alpha \pm \sqrt{a^2c^2\sin^2\alpha + 4acn^2h^2\sin\beta\sin\varphi})$$
$$: 2nh\sin\varphi$$

erhalten wird.

Auf ähnliche Art werden die Punkte g, h ꝛc. gefunden.

§. 651.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm abcd (Fig. 596.) in mehrere, etwa in drei gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite ad parallel gehen.

Auflösung.

Diejenige Seite, etwa ab, auf welche die Theilungslinien stoßen, mit welcher sie nicht parallel gehen sollen, theile man in drei Theile bei e und f. Zieht man nun durch diese Punkte mit ad die eg und die fh parallel, so ist die Theilung vollzogen: es ist dann

$$aegd = efhg = bohf = \tfrac{1}{3}\ abcd.$$

Beweis.

Weil Parallelogramme von einerlei Höhe und Grundlinie einander gleich sind, so folgt ꝛc.

§. 652.

Man kann den Theilungslinien der Parallelogramme verschiedene Lagen anweisen und die Richtigkeit des Verfahrens stützt sich auf den im Beweise des vorigen §. angeführten Satz.

Bei Fig. 597. ist

$\triangle$ adf = $\triangle$ aef = bcfe = $\frac{1}{3}$ abcd,

wenn man be = $\frac{1}{3}$ ab macht.

Bei Fig. 598. ist

$\triangle$ ade = $\triangle$ aef = $\triangle$ bef = $\triangle$ bce = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ abcd,

wenn man bf oder ce = $\frac{1}{2}$ ab nimmt.

So ist bei Fig. 599.

adhe = bche = $\frac{1}{2}$ abcd,

wenn man sowohl ab als auch cd in vier gleiche Theile theilt.

Bei Fig. 600. ist

$\triangle$ adf = $\triangle$ def = $\triangle$ bef = $\triangle$ bce = $\frac{1}{4}$ abcd,

wenn ce = bf = $\frac{1}{2}$ cd gemacht wird.

Bei dem Rechteck abcd (Fig. 601.) ist

aeig = dfig = cfih = beih = $\frac{1}{4}$ abcd,

wenn ab in e und ad in g halbirt wurde.

Auch ist das Rechteck abcd (Fig. 602.) in acht gleiche Theile getheilt, weil fg # ad und hi # ab geht.

An Fig. 603. kann ersehen werden, wie jedes Rechteck abcd in eine beliebige Anzahl gleiche Theile getheilt werden kann, wenn die Theilungslinien aus einem Punkte b, der zugleich der Scheitel eines Figurenwinkels ist, gezogen wird. Im Falle die Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile das Rechteck zerlegt werden soll, eine ungerade, wenn sie 2n $\pm$ 1 ist, so theile man jede der Seiten des Rechtecks, welche Schenkel eines rechten Winkels sind, in 2n $\pm$ 1 Theile und lasse allemal beim Ziehen der Theilungslinien einen Theilpunkt aus, weshalb demnach der 3, 5, 7, 9 ... Punkt mit dem Scheitel verbunden wird.

Ist aber das Rechteck in gleiche Theile zu theilen, deren Menge durch eine gerade Zahl 2n dargestellt wird, so theile man sowohl ad als auch cd in $\frac{2n}{2}$, das ist in n gleiche Theile, und verbinde die Punkte e, f, g, h ꝛc. durch gerade Linien mit dem Scheitel b.

Bei dem Rechteck abcd (Fig. 604.) ist

adgl = $\triangle$ lgk = bcgk = $\frac{1}{3}$ abcd,

wenn man de = ef = cf = $\frac{1}{3}$ cd macht, fh in i halbirt und al = bk nimmt.

§. 653.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm abcd (Fig 605.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß eine der Theilungslinien mit einer Seite bc parallel, die andere aber aus einem in der Seite cd gegebenen Punkte h geht.

Auflösung.

Man theile cd bei e und f in drei gleiche Theile, nehme die Entfernung des Punktes h von d und trage sie von g nach i. Wird nun i und h durch ih verbunden, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis.

Daß $bcfg = \frac{1}{3}\,abcd$ ist, geht aus dem §. 651. hervor.

Um nun von den andern beiden Theilen den Beweis zu führen, ziehe man ah und fi, es ist dann

1) $\triangle adh = \triangle fgi$,

und weil

2) $ai = fh$

gemacht wurde, so ist auch ahfi ein Parallelogramm, folglich

3) $\triangle ahi = \triangle fhi$.

Aus 3 und 1 folgt aber

4) $\triangle adh + \triangle ahi = \triangle fgi + \triangle fhi$ oder

5) $adhi = fgih$,

und weil

6) $adfg = \frac{2}{3}\,abcd$

ist, so muß wegen 5 und 6 auch

7) $adhi = fgih = bcfg = \frac{1}{3}\,abcd$

seyn.

§. 654.

Es konnte bei der vorstehenden Aufgabe der Punkt h auch so liegen, wie Fig. 606 zeigt. In diesem Falle wird, wie bei Fig. 605., die ab bei e und f in drei gleiche Theile getheilt und $fg \# bc$ gemacht. Trägt man nun ah von g nach i, so ist, wenn hi gezogen wird,

$$afih = dgih = \frac{1}{3}\,abcd.$$

Zieht man di und hf, so wird hierüber der Beweis ganz so wie §. 653. geführt.

§. 655.

Aufgabe.

Ein Rechteck abcd (Fig. 607.) oder ein Parallelogramm dergestalt in mehrere (etwa in drei) gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien parallel mit den Seiten gehen, welche die Grundlinie und Höhe des Rechtecks bilden, sich aber in das Diagonale bd unter einem Winkel, der beim Rechteck ein Rechter ist, brechen.

Auflösung.

Die ab theile man hier in drei gleiche Theile, errichte in jedem der Theilpunkte e und f auf ab Lothe, mache sie so lang, bis sie einen über ab geschlagenen Halbkreis in g und h treffen, beschreibe aus b mit bh den Bogen hi und aus b mit bg den Bogen gk; dadurch erhält man die Punkte i und k, durch welche man mit ad die Parallelen km und il bis an die Diagonale bd zieht und mo, wie auch ln mit cd parallel macht. Es ist durch diese Operation

$$\text{biln} = \text{ikmohl} = \text{adcomk} = \tfrac{1}{3}\,\text{abcd}$$

geworden.

Nimmt man die Paralleltrapeze admk, ikml und das Dreieck bil, so ist jede dieser Figuren ein Sechstel von abcd.

Beweis.

Wegen der Auflösung ist

1) $\text{bf} : \text{bh} = \text{bh} : \text{ab}$, oder
2) $\tfrac{1}{3}\,\text{ab} : \text{bi} = \text{bi} : \text{ab}$, woraus
3) $\text{bi} = \text{ab}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ hervorgeht.

Ferner muß

4) $\text{bk} = \text{ab}\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ seyn.

Nun steht:

5) $\triangle\,\text{bil} : \triangle\,\text{bkm} = \overline{\text{bi}}^{\,2} : \overline{\text{bk}}^{\,2}$, das ist
6) $\triangle\,\text{bil} : \triangle\,\text{bkm} = (\text{ab}\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 : (\text{ab}\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2$, oder
7) $\triangle\,\text{bil} : \triangle\,\text{bkm} = 1 : 2$, woraus
8) $(\triangle\,\text{bkm} - \triangle\,\text{bil}) : \triangle\,\text{bil} = (2-1) : 1$, oder
9) $\text{ikml} : \triangle\,\text{bil} = 1 : 1$, und demzufolge
10) $\text{ikml} = \triangle\,\text{bil}$ hervorgeht.

Nun ist aber auch

11) $\triangle$ bil : $\triangle$ abd = $\overline{bi}^2 : \overline{ab}^2$, oder

12) $\triangle$ bil : $\triangle$ abd = $(ab \sqrt{\frac{1}{3}})^2 : \overline{ab}^2$, oder

13) $\triangle$ bil : $\triangle$ abd = $\frac{1}{3}\overline{ab}^2 : ab^2$, woraus

14) $\triangle$ bil = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ abd wird.

Verbindet man 14 mit 10, so erhält man

15) $\triangle$ bil = ikml = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ abd.

Für die andern im Dreiecke bcd liegenden Theile wird der Beweis auf dieselbe Art geführt.

§. 656.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm abcd (Fig. 608.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem gegebenen Winkel a gehen.

Auflösung.

Man theile die cd in drei gleiche Theile, verbinde den ersten Theilpunkt e (von c an) mit b, halbire be in f, ziehe ac und mache fg # ac. Wird nun ag gezogen, so ist

$\triangle$ ade = aecg = $\triangle$ abg = $\frac{1}{3}$ abcd.

Beweis.

Man ziehe af, cf und mache eh # bc.

Nun ist

1) $\triangle$ ade = $\frac{1}{2}$ adeh = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ abcd = $\frac{1}{3}$ abcd;

ferner ist

2) $\triangle$ cef = $\triangle$ bcf, und

3) $\triangle$ aef = $\triangle$ abf.

Addirt man 2 zu 3, so wird

4) $\triangle$ cef + $\triangle$ aef = $\triangle$ bcf + $\triangle$ abf, oder

5) aecf = abcf = $\frac{1}{2}$ abce.

Nun ist

6) $\triangle$ aof = $\triangle$ ocg, folglich muß

7) aecf — $\triangle$ aof = abcf — $\triangle$ ocg, oder auch

8) aecf — $\triangle$ aof + $\triangle$ ocg = abcf.

Das ist aber

9) aecg = abcf, woraus

10) aecg = $\frac{1}{2}$ abce erhalten wird.

Da nun aber wegen 1

11) abce = $\frac{2}{3}$ abcd ist, so muß, wenn 11 nach 10 kommt:

12) aecg = $\frac{1}{3}$ abcd, folglich

13) aecg = △ ade = △ abg = $\frac{1}{3}$ abcd seyn.

§. 657.

Aufgabe.

Das Parallelogramm abcd (Fig. 609.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem in einer Seite liegenden Punkte e gehen.

Auflösung.

Man theile sowohl ab als auch cd in drei gleiche Theile, so daß dg = af = $\frac{1}{3}$ ab wird, mache gh = ef und ziehe eh. Nun ziehe man bh, halbire sie in i, ziehe ce und mache ik # ce. Wird nun ke gezogen, so ist die Theilung beendet; es ist nämlich:

adhe = ehck = △ ebk = $\frac{1}{3}$ abcd.

Beweis.

Man ziehe ci, ei und fg.

Es ist

1) △ hic = △ bic und

2) △ hei = △ bie.

Aus 1 und 2 erhält man

3) △ hic + △ hei = △ bic + △ bie, das ist

4) chei = bcie.

Ferner ist

5) △ eik = △ cik, folglich muß

6) △ eik — △ ilk = △ cik — △ ilk, oder

7) △ eil = △ clk

werden. Addirt man zu 7 das Trapez eilkb, so erhält man

8) △ eil + eilkb = △ clk + eilkb, woraus, wenn man statt der Theile das Ganze setzt:

9) △ ebk = bcie hervorgeht.

Kommt 4 zu 7, so findet man

10) chei + △ clk = bcie + △ eil, oder

11) chei + △ clk — △ eil = bcie, und hieraus wird:

12) ckeh = bcie.

Da nun

13) aehd = $\frac{1}{3}$ abcd ist, so muß auch

14) bche = $\frac{2}{3}$ abcd seyn.

Nun ist, wenn man 12 nach 9 setzt:

15) ckeh = △ ebk, und

16) bche = ckeh + △ ebk, folglich wegen 15 auch:

17) bche = △ ebk + △ ebk oder

18) bche = 2 △ ebk, das ist:

19) △ ebk = $\frac{1}{2}$ bche, weshalb, wenn 14 nach 19 gebracht wird:

20) △ ebk = $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{3}$ abcd), oder

21) △ ebk = $\frac{1}{3}$ abcd ist, wodurch, wenn 21 in 13 substituirt wird:

22) △ ebk = aehd = $\frac{1}{3}$ abcd erfolgt, und es ist daher auch

23) ehck = $\frac{1}{3}$ abcd.

§. 658.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez (Fig. 610.) so zu halbiren, daß die Halbirungslinie ag aus dem Scheitel a eines Figurenwinkels geht.

Auflösung.

Man verlängere die ab, bis ae = cd wird, ziehe durch e und d eine Linie, welche die Verlängerung der bc in f trifft. Halbirt man nun bf in g, so wird, wenn man ag zieht:

△ abg = adcg = $\frac{1}{2}$ abcd seyn.

Beweis.

Man ziehe af und ac.

Weil cd # ae, ferner ae = ad gemacht worden ist, so muß

1) ac # de,

und daher auch

2) △ acf = △ acd seyn.

Zieht man von 2 das Dreieck aic ab, so wird

3) △ acf — △ aic = △ acd — △ aic,

das ist, wenn man statt der Theile das Ganze setzt:

4) △ cfi = △ adi.
Setzt man hier abci hinzu, so muß
5) △ cfi + abci = △ adi + abci oder
6) △ abf = abcd werden.
Nun ist aber
7) △ abg = ½ △ abf,
folglich muß, wenn man 6 nach 7 trägt:
8) △ abg = ½ abcd
werden.

§. 659.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 611.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie eh aus einem in einer der beiden parallelen Seiten bestimmten Punkt e gehe.

Auflösung.

Man verlängere ab, bis ef = be ist, ziehe df und mache ag # df. Wird nun cg in h halbirt und die eh gezogen, so ist

adhe = bche = ½ abcd.

Beweis.

Wird fg, eg und ce gezogen, so ist, weil ag # df gemacht wurde,
1) △ adg = afg.
Nimmt man hiervon △ aig weg, so erhält man
2) △ adg — △ aig = △ afg — △ aig, oder
3) △ dig = △ afi.
Setzt man nun zu 3 das Trapez aige, so wird
4) △ dig + aige = △ afi + aige, oder
5) adge = △ fge.
Nun ist aber, weil fe = be gemacht wurde:
6) △ fge = △ bce, folglich wegen 5, wenn man 6 damit verbindet:
7) △ bce = adge.
Weil endlich
8) ch = gh ist, so muß auch
9) △ ech = △ geh seyn, und wenn 7 zu 9 kommt,
10) △ bce + △ ech = adge + △ geh, das ist
11) bche = adhe = ½ abcd
werden.

§. 660.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie auf den parallelen Seiten lothrecht steht.

Auflösung.

Wenn abfe (Fig. 612.) das Trapez ist, so fälle man von e und f auf die ab die Lothe eh und fk. Nun ziehe man eine gerade Linie und setze auf dieselbe die Länge

$$bk + 2hk + 3ah$$

von p bis q und theile (die Summe) pq in vier gleiche Theile. Nimmt man nun einen solchen Theil von a nach o und errichtet man in o auf ab ein Loth ol, so ist

$$aole = bflo = \tfrac{1}{2}\, abfe.$$

Beweis.

Bezeichnet man der Kürze wegen

ah durch a,
hk durch b und
kb durch c

so ist 1) $ao = \frac{c + 2b + 3a}{4}$ und

2) $ho = ao - a$ oder wenn 1 nach 2 gebracht wird:

3) $ho = \frac{2b + c - a}{4}$

und es muß daher

4) $aole = \frac{p}{2}\left(\frac{3a + 2b + c}{4} + el\right)$

seyn. Da nun aber

5) $el = ho$ ist, so wird

6) $aole = \frac{p}{2}\left(\frac{3a + 2b + c}{4} + \frac{2b + c - a}{4}\right)$

werden, wenn man 3 und 5 in 4 anwendet. Aus 6 aber erhält man durch gehöriges Abkürzen:

7) $aole = \frac{p}{4}(a + 2b + c)$.

Nun ist aber

8) $abfe = \frac{p}{2}(a + 2b + c)$,

daher auch

9) $\frac{abfe}{2} = \frac{p}{4}(a + 2b + c)$; und wenn man 7 mit 9 verbindet,

10) $aole = \frac{1}{2} abfe$.

§. 661.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 113.) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien von den parallelen Seiten ausgehen.

Auflösung.

Das Paralleltrapez soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Man theile jede der parallelen Seiten ab und cd in drei gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte e, g, f und h durch gerade Linien und es ist sodann:

$aegd = efhg = bchf = \frac{1}{3} abcd$.

Beweis.

Weil, wenn man de, fg und bh zieht, die Dreiecke ade, efg und bfh, ferner die Dreiecke deg, fgh und bch einander gleich sind, so muß

$\triangle ade + \triangle deg = \triangle efg + \triangle fgh = \triangle bfh + \triangle bch$

oder wenn man statt der Theile das Ganze nimmt:

$adge = efhg = bchf = \frac{1}{3} abcd$ seyn.

Uebrigens kann das Paralleltrapez auch in solche Theile zerlegt werden, die zu einander in einem bestimmten Verhältnisse, etwa wie m : n : o stehen, wenn man jede der Seiten ab und cd, in Theile theilt, die sich wie m: n : o verhalten.

§. 662.

Aufgabe.

Jedes Paralleltrapez in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und zwar so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer der beiden nicht parllelen Seiten gleichlaufend sind.

Auflösung.

Das Paralleltrapez abcd (Fig. 614.) soll in drei gleiche Theile getheilt werden und die Theilungslinien sollen mit der Seite ad parallel werden.

Man theile die ad allemal in die Hälfte und ziehe durch den Halbirungspunkt, die ef # ab. Diese Linie ef theile man, der obigen Bestimmung wegen, bei g und h in drei gleiche Theile. Zieht man nun durch g die ik und durch h die lm mit ad parallel, so ist

$$adki = ikml = bcml = \frac{1}{3}\ abcd.$$

Beweis.

Wenn man durch e die on # ad zieht und cd bis o verlängert, so ist adon ein Parallelogramm und daher

1) $ak = im = lo = \frac{1}{3}$ adon. Weil
2) $\triangle ceo = \triangle ben$ ist, so muß
3) adon = abcd folglich
4) $ak = im = lo = \frac{1}{3}$ adon seyn.

Nun ist aber auch

5) cenlm + $\triangle$ceo = cenlm + $\triangle$ben oder
6) lo = bcml,

folglich, wenn 6 nach 4 kommt:

7) $ak = im = bcml = \frac{1}{3}$ adon

und demnach bewiesen, was behauptet wurde.

§. 663.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 615.) dergestalt in eine beliebige Anzahl gleicher (etwa drei) Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien parallel mit den parallelen Seiten des Trapezes gehen.

Auflösung.

Ueber einer der parallelen Seiten und zwar über der größern ab, beschreibe man einen Halbkreis, ziehe de # bc, mache bf = be und fälle von f auf die ab den Perpendikel fg. Nun theile man ag in drei gleiche Theile — der Aufgabe wegen — und errichte in dem Theilpunkte 1 das Loth 1h; im Theilpunkte 2, das Loth 2i, ziehe bh und bi und beschreibe aus b mit bh und bi die Bogen hk und il. Legt man nun durch k und l Parallelen mit bc, so erhält man die Punkte m und n, durch welche man mit cd die mo und die np parallel zieht.

Beweis.

Man verlängere die Seiten ad und bc, bis sie sich in q treffen.

Nun ist wegen der Konstruction, weil

$$bg : bf = bf : ab \text{ oder}$$
$$bg : be = be : ab \text{ ist:}$$

$$1)\ \overline{be}^2 = ab \times bg$$

Ferner ist ebenfalls der Konstruction wegen und weil

$$b1 : bh = bh : ab \text{ oder}$$
$$b1 : bk = bk : ab \text{ ist:}$$

$$2)\ \overline{bk}^2 = ab \times b1.$$

Da aber

$$3)\ b1 = bg + g1,$$ so wird aus 2, wenn man 3 hinzusetzt:

$$4)\ \overline{bk}^2 = ab\ (bg + g1) \text{ oder}$$

$$5)\ \overline{bk}^2 = ab\left(bg + \frac{ag}{3}\right).$$

Auf ähnliche Art findet man

$$6)\ \overline{bl}^2 = ab \times b2; \text{ und weil}$$
$$7)\ b2 = bg + \tfrac{2}{3}\,ag, \text{ so wird}$$

$$8)\ \overline{bl}^2 = ab\ (bg + \tfrac{2}{3}\,ag) \text{ werden.}$$

Die Dreiecke cdq und moq sind ähnlich; es wird daher

$$9)\ \triangle cdq : \triangle moq = \overline{cd}^2 : \overline{mo}^2 \text{ oder weil}$$
$$10)\ be = cd \text{ und } bk = mo$$

gemacht wurde:

$$11)\ \triangle cdq : \triangle moq = \overline{be}^2 : \overline{bk}^2$$

oder wegen 1 und 5

$$12)\ \triangle cdq : \triangle moq = ab \times bg : ab\left(bg + \frac{ag}{3}\right).$$ Kürzt man hier ab so erhält man

$$13)\ \triangle cdq : \triangle moq = bg : \left(bg + \frac{ag}{3}\right).$$

Aus dieser Proportion geht aber folgende hervor:

$$14)\ (\triangle moq - \triangle cdq) : \triangle cdq = \left(bg + \frac{ag}{3} - bg\right) : bg$$

oder, nach gehöriger Abkürzung:

15) cdmo : △cdq = ag : 3bg.

Auf ähnliche Art wird gefunden:

16) cdnp : △cdq = 2ag : 3bg und

17) abcd : △cdq = 3ag : 3bg; folglich ist

18) cdmo : cdnp : abcd = 1 : 2 : 3;

weshalb

19) cdmo = mnpo = abpn = $\frac{1}{3}$abcd ist.

§. 664.

Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Paralleltrapez in vier gleiche Theile so zu theilen, daß die eine Theilungslinie mit einer der parallelen Seiten gleichlaufend wird, die andere Theilungslinie aber lothrecht auf diese Seiten kommt.

Auflösung.

Man verlängere die nicht parallelen Seiten ad und bc (Fig. 616.), bis sie sich in e schneiden und fälle von e auf die ab das Loth eh. Hierdurch ist das Paralleltrapez halbirt. Nun schneide man die eh nach §. 287. dergestalt, daß

$$\overline{eh}^2 - \overline{eg}^2 = \overline{eg}^2 - \overline{ef}^2 \text{ *)}$$

wird. Trägt man nun eg auf die eh von e nach g und zieht man ik # ab, so ist das Trapez nach Verlangen getheilt.

Beweis

Weil

1) $\overline{eh}^2 - \overline{eg}^2 = \overline{eg}^2 - \overline{ef}^2$ gemacht wurde, so muß auch

---

*) Der Beweis für die Konstruction des §. 287 ist folgender: Es ist (Fig. 292.)

1) $dg^2 = df^2 + fg^2$; ferner nach der Konstruction:
2) $dg^2 = df^2 + de^2$. Nun ist
3) $di = \frac{1}{2}\, dg$ und
4) $\overline{di}^2 = \frac{1}{4}\, dg^2$, folglich, wenn 2 nach 4 kommt:
5) $di^2 = \frac{1}{4}(\overline{df}^2 + \overline{de}^2)$. Nun ist
6) $\overline{dk}^2 = \overline{dh}^2 = 2.\overline{di}^2$ oder wegen 5:
7) $\overline{dk}^2 = \overline{dh}^2 = \frac{1}{2}(\overline{df}^2 + de^2)$; woraus
8) $2\,\overline{dk}^2 = \overline{df}^2 + de^2$ oder
9) $\overline{df}^2 - \overline{dk}^2 = \overline{dk}^2 - de^2$

2) $\triangle abe - \triangle eik = \triangle eik - \triangle cde$ *) seyn. Hieraus wird aber

3) $\triangle abe + \triangle cde = 2\triangle eik$.

Nimmt man hiervon $2\triangle cde$ weg, so bleibt:

4) $\triangle abe + \triangle cde - 2\triangle cde = 2\triangle eik - 2\triangle cde$ oder

5) $\triangle abe - \triangle cde = 2(\triangle eik - \triangle cde)$ oder

6) $abcd = 2cdik$, woraus

7) $cdik = \frac{1}{2} abcd$ und daher auch

8) $ahgi = bhgk = dfgi = cfgk = \frac{1}{4} abcd$ wird.

§. 665.

Aufgabe.

Von dem Paralleltrapez abcd (Fig. 617.) ein Stück hcdl dergestalt abzuschneiden, daß es dem Dreiecke acd gleich sey.

Auflösung.

Ueber ab beschreibe man einen Halbkreis, ziehe ce # bd, errichte in e auf ab das Loth ef, ziehe bf und beschreibe damit aus b den Bogen fg. Wird nun durch g die gh # ce gemacht und durch h die hl # cd gezogen, so ist:

$$cdlh = \triangle acd.$$

Beweis.

Man ziehe af, errichte in c auf cd ein Loth cn, setze

$$ab = a,$$
$$cd = be = b \text{ und}$$
$$cn = c.$$

---

*) Beweis hierzu:

Es sey der Kürze wegen (Fig. 616): $\overline{eh}^2 = a^2$, $\overline{eg}^2 = b^2$, $\overline{ef}^2 = c^2$; ferner $\triangle abe = A$, $\triangle ike = B$ und $\triangle cde = C$. Nun steht:

1) $a^2 : b^2 = A : B$, woraus

2) $(a^2 - b^2) : (A - B) = b^2 : B$ wird. Ferner ist

3) $b^2 : c^2 = B : C$, woraus

4) $(b^2 - c^2) : (B - C) = b^2 : B$ wird. Aus 2 erhält man

5) $a^2 - b^2 : b^2 = (A - B) : B$ und aus 4 ergibt sich

6) $b^2 - c^2 : b^2 = (B - C) : B$. Nun ist wegen 1 im Beweise des §. 664

7) $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. Bringt man hierein 5 und 6, so wird

8) $b^2 (A - B) : B = b^2 (B - C) : B$; das ist

9) $A - B = B - C$ oder

10) $\triangle abe - \triangle eik = \triangle eik - \triangle cde$.

Nun ist

1) $be : bf = bf : ab$ oder wegen der Konstruction:
2) $be : bg = bg : ab$ oder auch:
3) $b : bg = bg : a$; weshalb
4) $bg = \sqrt{ab}$ ist. Und weil
5) $hr = hl - rl = bg - b$ ist, so wird, wenn 4 nach 5 kommt:
6) $hr = \sqrt{ab} - b$ werden.

Der Aehnlichkeit der Dreiecke aec und chr wegen steht

7) $ae : hr = cn : cm$ oder wegen 6 und weil
8) $ae = a - b$ ist:
9) $(a - b) : (\sqrt{ab} - b) = c : cm$, woraus
10) $cm = \frac{c(\sqrt{ab} - b)}{a - b}$ wird.

Da nun

11) $chld = \triangle chr + cdlr$ oder
12) $chld = \frac{1}{2} hr \times cm + cd \times cm$ oder
13) $chld = \frac{cm}{2} (hr + 2\,cd)$ ist, so muß, wenn 10 und 6 nach 13 gesetzt werden:

14) $chld = \frac{c(\sqrt{ab} - b)}{a - b} \frac{1}{2} (\sqrt{ab} + b)$

werden, woraus

15) $chld = \frac{1}{2} bc$ wird.

Nun ist

16) $\triangle acd = \frac{1}{2} cd \times cn$ oder
17) $\triangle acd = \frac{1}{2} b \cdot c$; folglich, wenn 17 nach 15 kommt:
18) $chld = \triangle acd$; was zu erweisen war.

§. 666.

Aufgabe.

Ein Trapez $abcd$ (Fig. 618.) so zu halbiren oder auch in mehrere Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem Figurenwinkel, etwa aus c, gehen.

Auflösung.

Man ziehe ac verlängere ab so weit, bis eine durch d mit ac parallel gezogene Linie in e getroffen wird. Theilt man nun be bei f in die Hälfte oder theilt man

be in so viel Theile, als deren das Trapez enthalten soll, und zieht man cf, so ist

$$\triangle bcf = adcf = \tfrac{1}{2}\, abcd.$$

Beweis.

Man ziehe ce und es ist

1) $\triangle aeo = \triangle cdo$, folglich auch

2) $\triangle aeo + abco = \triangle cdo + abco$ oder:

3) $\triangle bce = abcd$.

Da nun be in f halbirt ist, so muß auch

4) $\triangle bcf = \tfrac{1}{2} \triangle bce$ seyn, woraus, wenn 3 nach 4 kommt,

5) $\triangle bcf = \tfrac{1}{2}\, abcd$ folgt.

§. 667.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 619.) in zwei gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinie aus einem in einer Seite cd liegenden Punkte e geht.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonale bd, mache cf # bd und verlängere ab bis f. Nun theile man af bei g in die Hälfte, ziehe eg und lege dh # eg; wird nun e und h durch die eh verbunden, so ist:

$$adeh = bceh = \tfrac{1}{2}\, abcd.$$

Beweis.

Es ist, wie bei der Verwandlung der Figuren gezeigt wurde,

1) $\triangle adf = abcd$ und ferner ist, wenn man dg zieht

2) $\triangle adg = \tfrac{1}{2} \triangle adf$, folglich ist auch wegen 1

3) $\triangle adg = \tfrac{1}{2}\, abcd$.

Da nun eg # eh ist, so muß auch

5) $adeh = \triangle adg$ seyn und es muß sich auch, wenn man 3 nach 4 setzt,

5) $adeh = \tfrac{1}{2}\, abcd = bceh$ ergeben.

§. 668.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 620.) so zu halbiren, daß die Halbirungslinie mit einer Seite ad parallel geht.

Auflösung.

Man verlängere die an ad liegenden Seiten ab und cd, bis sie sich in g treffen und beschreibe über ag einen Halbkreis. Nun ziehe man bd und mache ce # bd; halbire ae in f, fälle von f in der ag ein Loth fo, ziehe og und beschreibe damit den Bogen oh. Wird nun hi # ad gemacht, so ist

$$adih = bcih = \tfrac{1}{2}\, abcd.$$

Beweis.

Man ziehe df und de.

Es ist

1) $\triangle ade = abcd$ und
2) $\triangle adf = \frac{1}{2} \triangle ade$ und daher
3) $\triangle adf = \frac{1}{2}\, abcd$. Weil nun
4) $\triangle def = \triangle adf = \frac{1}{2} \triangle ade$, so ist auch
5) $\triangle def = bcdf$ und daher wegen 4, 3 und 5
6) $bcdf = \frac{1}{2}\, abcd$.

Ferner steht wegen der Konstruction:

7) $ag : go = go : fg$. Da nun
8) $gh = go$ gemacht wurde, so muß auch
9) $ag : gh = gh : fg$ seyn, woraus
10) $ag : fg = \overline{ag}^2 : \overline{gh}^2$ folgt.

Eben so ist, weil

11) $\triangle adg \sim \triangle hig$ konstruirt wurde,
12) $\triangle adg : \triangle hig = \overline{ag}^2 : \overline{gh}^2$.

Bringt man nun nach 12 den Werth aus 10, so erhält man:

13) $\triangle adg : \triangle hig = ag : fg$.

Die Dreiecke adg und dfg haben einerlei Höhe, folglich wird

14) $\triangle adg : \triangle dfg = ag : fg$ seyn müssen.

Verbindet man 13 mit 14, so erhält man:

15) $\triangle adg : \triangle dfg = \triangle adg : \triangle hig$, woraus
16) $\triangle dfg = \triangle hig$ gefunden wird.

Nimmt man endlich von 16 das Dreieck bcg weg, so wird

17) $\triangle dfg - \triangle bcg = \triangle hig - \triangle bcg$, woraus
18) $bcdf = bcih$ folgt; und wenn man 6 nach 18 bringt, so ist
19) $bcih = \frac{1}{2}\, abcd$.

§. 669.

Aufgabe.

Das Trapez abcd (Fig. 621.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie eh aus dem Mittelpunkte e der Seite ab kommt.

Erste Auflösung.

Man ziehe df # ab, halbire df in g, ziehe ec und gh # ec. Verbindet man nun e mit h, so ist $adhe = bche = \frac{1}{2}\,abcd$.

Beweis.

Es ist

1) $adge = begf$ und
2) $\triangle cdg = \triangle cfg$, woraus
3) $adge + \triangle cdg = begf + \triangle cfg$ oder
4) $adcge = bcge = \frac{1}{2}\,abcd$ erhalten wird.

Nun ist

5) $\triangle ego = \triangle cho$, folglich auch
6) $aegohd + \triangle ego = aegohd + \triangle cho$, woraus
7) $adhe = adcge$ erhalten wird. Setzt man 4 nach 7, so ist
8) $adhe = \frac{1}{2}\,abcd$.

Andere Auflösung.

Man verlängere die kürzere Seite cd (Fig. 622.) und fälle von a und b Lothe af und bg auf diese Verlängerung. Zu den drei Linien af + bg, bg und cd suche man die vierte Proportionale (§. 203.), welche man von d bis h auf der cd trägt. Wird nun eh gezogen, so ist

$$adhe = bche = \tfrac{1}{2}\,abcd.$$

Beweis.

Wegen der Auflösung ist

1) $(af + bg) : bg = cd : dh$ oder weil
2) $cd = ch + dh$ ist, so muß auch aus 1, wenn 2 dahin kommt:
3) $(af + bg) : bg = (ch + dh) : dh$ werden. Kürzt man die Vor- und Nachsätze ab, so erhält man

4) $\left(\frac{af}{bg} + 1\right) : 1 = \left(\frac{ch}{dh} + 1\right) : 1$, woraus

5) $\frac{af}{bg} = \frac{ch}{dh}$ und folglich

6) ch : dh = af : bg oder auch

7) ch × bg = df × af hervorgeht. Nun ist aber 8) $\frac{1}{2}$ ch × bg = △ bch und

9) $\frac{1}{2}$ dh × af = △ adh, folglich auch

10) ch × bg = 2 △ bch und

11) dh × af = 2 △ adh, wodurch, wenn 10 und 11 nach 7 gebracht wird,

12) 2 △ bch = 2 △ adh oder

13) △ bch = △ adh wird. Ferner ist

14) △ beh = △ aeh und wenn 13 nach 14 kommt: 15) △ bch + △ beh = △ adh + △ aeh oder

16) bche = adhe = $\frac{1}{2}$ abcd.

§. 670.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 623.), welches zwei gleich große Winkel a und b hat, so zu halbiren, daß die Theilungslinie ik auf dem gemeinen Schenkel ab der gleichen Winkel lothrecht steht.

Auflösung.

Man verlängere die Seiten ad und bc, ferner ab und cd, wodurch die Punkte e und f erhalten werden. Nun fälle man von e auf ab das Loth eg, mache hl = dh, fälle von l auf ce den Perpendikel lm und suche zu $\frac{ce}{4}$ und lm das geometrische Mittel q (§. 200).

Macht man nun nach §. 643 das Paralleltrapez $ghki = q^2$, so ist

adki = bcki = $\frac{1}{2}$ abcd.

Beweis.

Es ist

1) adhg + △ dhe = bchg + △ ceh und weil

2) △ ceh = △ cel + △ ehl ist, so wird aus 1

3) adhg + △ dhe = bchg + △ cel + △ ehl.

Da ferner

4) △ dhe = △ ehl, so muß, wenn 4 von 3 weggenommen wird,

5) adhg = bchg + △cel erhalten werden.
Nun ist
6) adhg = bchg + ½ △cel + ½ △cel, woraus sich ergibt:
7) adhg − ½ △cel = bchg + ½ △cel.
Und weil
8) $q^2 = \frac{1}{2}$ △cel = ghki gemacht wurde, so muß, wenn 8 nach 7 gebracht wird,
9) adhg − ghki = bchg + ghki oder
10) adki = bcki = ½ abcd seyn.

§. 671.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd durch eine gebrochene Linie bed, welche aus zwei bestimmten, einander gegenüber liegenden Figurenwinkeln b und d kommt, zu halbiren.

Auflösung.

Man verbinde die beiden Scheitel a und c (Figur 624.), aus welchen die Halbirungslinie nicht gehen soll, durch ac, halbire ac in e und ziehe de und be: es ist dann

adeb = bcde = ½ abcd.

Beweis.

Weil △ade = △cde und
△abe = △bce ist, so folgt ꝛc.

§. 672.

Zieht man in Fig. 624 die bd und macht man ef # bd, so ist, wenn auch noch df gezogen wird:

△adf = bcdf. (§. 666.)

Beweis.

Es ist 1) △ade = △cde und
2) △aeb = △bce, folglich wird aus 1 und 2
3) abed = bcde. Nun ist aber
4) △def = △bef, folglich
5) △def + adef = △bef + bcde oder
6) △adf = adeb. Eben so ist
7) △bde = △bdf und demnach, wenn man △bdo wegnimmt:

8) $\triangle bde - \triangle bdo = \triangle bdf - \triangle bdo$
oder 9) $\triangle deo = \triangle bfo$, woraus
10) $\triangle deo + cdob = \triangle bfo + cdob$
oder 11) $bcde = bcdf$ wird.
Aus 3 und 11 geht endlich hervor:
12) $abed = bcdf$ und aus 6 und 12 wird:
13) $\triangle adf = bcdf = \frac{1}{2}\, abcd$.

§. 673.

Aufgabe.

Ein Trapez abdc (Fig. 625.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie, die eine gebrochene ist, durch die Halbirungspunkte g und h zweier einander gegenüber liegender Seiten gehe.

Auflösung.

Mit einer der halbirten Seiten, z. B. mit bd, ziehe man durch einen Figurenwinkel c die ce parallel und verbinde den Scheitel b, welcher der Seite ac, in der der Halbirungspunkt g liegt, mit g durch die bg: es schneiden sich die Linien ce und bg im Punkte f. Zieht man nun fh, so ist die gebrochene, durch g und h gehende Linie gfh die gesuchte Theilungslinie und es ist

$$abhfg = cdhfg = \frac{1}{2}\, abdc.$$

Beweis.

Man ziehe bc und ch. Durch die bc wird das Trapez in die Dreiecke abc und bcd getheilt. Kann man nun beweisen, daß

$abhfg = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$ und auch
$cdhfg = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$ ist,

so hat man die Richtigkeit der Konstruction dargethan.

Nun ist

1) $\triangle abg = \triangle bcg = \frac{1}{2} \triangle abc$ und
2) $\triangle bfh = \triangle bch = \frac{1}{2} \triangle bcd$, weil $bh = dh$

nach der Aufgabe ist. Aus 1 und 2 wird:

3) $\triangle abg + \triangle bfh = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$ und da
4) $\triangle abg + \triangle bfh = abhfg$ ist, so wird aus 3 und 4
5) $abhfg = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$.

Ferner ist

6) $\triangle cfh = \triangle bcf$ und daher auch
7) $\triangle cfh + \triangle cfg = \triangle bcf + \triangle cfg$. Da nun

8) $\triangle cdh = \frac{1}{2} \triangle bcd$ ist, und weil
9) $\triangle bcf + \triangle cfg = \frac{1}{2} \triangle abc$ ist, so muß, wenn 9 nach 7 kommt,
10) $cgfh = \frac{1}{2} \triangle abc$ werden, woraus mit 8
11) $egfh + \triangle cdh = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$ wird.
Nimmt man nun bei 11 statt der Theile das Ganze, so muß
12) $cdhfg = \frac{1}{2} \triangle abc + \frac{1}{2} \triangle bcd$, oder wegen 5 und 11
13) $abhfg = cdhfg = \frac{1}{2} abdc$ seyn.

§. 674.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 626.) in zwei solche Theile zu theilen, die sich wie zwei begrenzte Linien ag und gh verhalten.

Auflösung.

Man ziehe bd, fälle aus a und c auf bd die Lothe af und ce, verlängere af, bis $if = ce$ wird. Nun suche man zu ah, ag und ai die vierte Proportionale (§. 203.) und trage sie von a nach l. Ferner suche man zu af, al und ab ebenfalls die vierte Proportionirte am, wodurch in ab der Punkt m bestimmt wird, aus welchem die dm gezogen und das Trapez abcd so halbirt ist, daß

$$bcdm : \triangle adm = gh : ag \text{ wird.}$$

Beweis.

Es ist
1) $\triangle adm : \triangle abd = am : ab$, ferner
2) $af : al = ab : am$ oder
3) $al : af = am : ab$.
Setzt man 3 nach 1, so erhält man
4) $\triangle adm : \triangle adb = al : af$.
Ferner steht:
5) $\triangle abd : \triangle bcd = af : ce$ oder
6) $\triangle abd : \triangle bcd = af : fi$.
Aus 6 geht aber hervor:
7) $\triangle abd : (\triangle abd + \triangle bcd) = af : (af + fi)$
das ist:
8) $\triangle abd : abcd = af : ai$.
Multiplicirt man den Werth aus 4 mit dem aus 8, so bekommt man

9) △adm : abcd = al : ai, woraus
10) (abcd — △adm) : △adm = (ai — al) : al oder
11) bcdm : △adm = li : al hervorgeht.

Nach der Auflösung ist endlich noch:

12) ah : ag = ai : al, woraus
13) (ah — ag) : ag = (ai — al) : al oder
14) gh : ag = li : al wird.

Verbindet man endlich 14 mit 11, so ergibt sich:

15) bcdm : △adm = gh : ag.

§. 675.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 627.) in z. B. drei gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien aus bestimmten in einer Seite ab liegenden Punkten gehen.

Auflösung.

Die Punkte e und f in ab sind gegeben. Man verwandle das Trapez abcd in ein Dreieck adg (§. 544.) und theile ag in drei gleiche Theile bei h und i. Jetzt ziehe man de und mache hk # de; ferner ziehe man df und lege durch i die il # df. Wird nun ek und fl gezogen, so ist

$$adke = eflk = bclf = \tfrac{1}{3}\, abcd.$$

Beweis.

Weil 1) △adg = abcd, so ist auch

2) $\triangle adh = \triangle dhi = \triangle dig = \tfrac{1}{3} \triangle adg = \tfrac{1}{3}\, abcd.$

Und weil

3) aedk = △adh, ferner
4) adlf = △adh + △dhi ist, so muß auch
5) $aedk = eflk = bclg = \tfrac{1}{3}\, abcd$ seyn.

§. 676.

Aufgabe.

Man soll das Trapez abcd (Fig. 628.) dergestalt etwa in drei gleiche Theile theilen, daß die Theilungslinien aus einem in einer Seite cd liegenden Punkte e gehen.

Auflösung.

Man ziehe bd, mache cf # bd und verlängere die ab so weit, bis die durch c mit bd parallel gezogene Li-

nie cf in f geschnitten wird. Nun theile man af in drei gleiche Theile, wodurch ag = $\frac{1}{3}$ af wird, ziehe eg und mache dh # eg. Ferner ziehe man be und ci # be. Wird nun hi in k halbirt und werden die Linien eh und ek gezogen, so ist

adeh = △hek = bcek = $\frac{1}{3}$ abcd.

Beweis.

Man ziehe dg, ei und df.

Es ist 1) △adf = abcd und
2) △adg = $\frac{1}{3}$ abcd. Ferner ist
3) △dem = △ghm, folglich auch
4) △dem + admh = △ghm + admh oder
5) adeh = △adg, oder wegen 2:
6) adeh = $\frac{1}{3}$ abcd. Auch ist
7) △hek = $\frac{1}{2}$ △hei und weil
8) △eoc = △boi ist, so muß auch
9) heob + △eoc = heob + △boi oder
10) bceh = △hei seyn. Setzt man endlich 7 nach 10, so findet man
11) △hek = $\frac{1}{2}$ bceh. Da nun nach 5 adeh der dritte Theil von abcd ist, so muß
12) bceh = $\frac{2}{3}$ abcd und demnach
13) △hek = $\frac{1}{3}$ abcd seyn.

Aus b geht hervor, daß adeh ein Drittel von abcd ist und aus 13 folgt dasselbe von △hek, daher muß auch
14) bcek = $\frac{1}{3}$ abcd seyn.

§. 677.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 629.) dergestalt in mehrere gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite ad parallel gehen.

Auflösung.

Das Trapez soll in drei gleiche Theile getheilt werden. Man ziehe bd und mache ce # bd; theile ae in drei gleiche Theile, mache af = $\frac{1}{3}$ ae, verlängere cd und ab, bis diese Verlängerungen sich in g treffen und beschreibe über ag einen Halbkreis aog. Nun fälle man von f in der ag einen Perpendikel fo, ziehe og, beschreibe damit aus g den Bogen oh, wodurch in ag der

Punkt h gefunden wird, durch welchen man mit ad die hi parallel zieht, welches die erste Theilungslinie ist, die adih = $\frac{1}{3}$ abcd abschneidet.

Jetzt ziehe man bi und lege ck # bi, theile hk bei l in die Hälfte, beschreibe unter hg einen Halbkreis hpg, fälle von l in ag die Normale lp, ziehe pg und beschreibe damit aus g den Bogen pm.

Hierdurch wird in ag der Punkt m bestimmt, durch welchen man mn # ad zieht. Die mn ist nun die zweite Theilungslinie, die von hicb das Paralleltrapez hinm abschneidet, welches auch ein Drittel von abcd ist.

Es wurde daher

adih = hinm = bcnm = $\frac{1}{3}$ abcd

erhalten und die Aufgabe ist demnach gelöst.

Beweis.

Man ziehe df und de und es ist sodann

1) △ade = abcd; ferner ist

2) △adf = $\frac{1}{3}$ △ade, daher wegen 1:

3) △adf = $\frac{1}{3}$ abcd = $\frac{1}{2}$ bcdf.

Nun ist wegen der Konstruction

4) ag : go = go : fg oder

5) ag : gh = gh : fg, woraus man

6) ag : fg = $ag^2 : gh^2$ erhält.

Weil nun die Dreiecke adg und hig ähnlich sind, so steht:

7) $\overline{ag^2} : \overline{gh^2}$ = △adg : △hig, oder wenn man 6 mit 7 verbindet:

8) ag : fg = △adg : △hig. Ferner ist

9) ag : fg = △adg : △dfg und aus der Verbindung der Schlüsse aus 8 und 9 wird

10) △adg : △hig = △adg : △dfg, woraus man

11) △hig = △dfg erhält. Zieht man hiervon △bcg ab, so bleibt

12) △hig — △bcg = △dfg — △bcg oder

13) hbci = bcdf.

Und da wegen 3

$\frac{1}{2}$ bcdf = △adf ist, so wird aus 13:

14) bcdf = 2 △adf werden, woraus wegen 13:

15) hbci = 2 △adf und wegen 2

16) hbci = $\frac{2}{3}$ △ade wird. Wegen 2 und 3 erhält man aus 16:

17) hbci = $\frac{2}{3}$ abcd, weshalb
18) adih = $\frac{1}{3}$ abcd ist.

Ebenso wird der Beweis für den Theil bcnm geführt.

§. 678.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 630.) durch zwei gerade aus zwei einander gegenüber liegenden Figurenwinkeln b und d gehende Linien in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe bd, mache ce # bd, mache af = $\frac{1}{3}$ ae und ziehe df. Nun verlängere man sowohl ce, als auch df so weit, bis die Verlängerungen beider Linien im Punkte g zusammentreffen, theile fg bei h in zwei gleiche Theile und ziehe bh. Dadurch wird das Trapez in die Dreiecke adf und bfh, und in ein Trapez bcdh zerlegt, welches die verlangten Theile des Trapezes abcd sind.

Beweis.

Es ist
1) △ ade = abcd, und weil
2) af = $\frac{1}{3}$ ae, so ist auch
3) △ afd = $\frac{1}{3}$ △ ade, oder wegen 1:
4) △ afd = $\frac{1}{3}$ abcd.

Weil ferner
5) fh = $\frac{1}{2}$ fg, und weil
6) △ bfh = $\frac{1}{2}$ △ bfg = $\frac{1}{2}$ bcdf ist, so folgt, da
7) bcdf = abcd — △ adf, oder wegen 4:
8) bcdf = $\frac{2}{3}$ abcd, daß
9) △ bfh = $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{3}$ abcd = $\frac{1}{3}$ abcd seyn muß,

und daher auch
10) △ adf = △ bhf = bcdh = $\frac{1}{3}$ abcd ist.

§. 679.

Aufgabe.

Das Trapez abcd (Fig. 631.) in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem Figurenwinkel gehen.

Auflösung.

Das Trapez soll z. B. in drei gleiche Theile getheilt werden und d ist der Punkt, aus welchem die Theilungslinien gehen sollen.

Man ziehe bd, mache ce # bd, verlängere ab bis e und theile ae in drei gleiche Theile. Verbindet man nun die Theilpunkte f und g mit d, so ist

$$\triangle adf = \triangle dfg = bcdg.$$

Beweis.

Durch die Konstruction ist

$\triangle ade = abcd$ gemacht und das Dreieck ade durch df und dg in drei gleiche Theile getheilt worden, daher ꝛc. ꝛc.

§. 680.

Im Falle beim Auflösen der vorigen Aufgabe etwa ein Theilpunkt g (Fig. 632.) außerhalb der ab fallen sollte, so darf man nur gh # ce ziehen und es sind dann adf, dfgh und $\triangle$ cdh die Theile des Trapezes. Der

Beweis

für dieses Verfahren ist bereits §. 631. geführt worden.

§. 681.

Aufgabe.

Von dem Trapez abcd (Fig. 633.) ein demselben ähnliches Stück aghk, welches $\frac{n}{m}$ der gegebenen Figur ist, abzuschneiden.

Auflösung.

Es mag die abzuschneidende Figur etwa $\frac{4}{7}$ der gegebenen seyn, weshalb $\frac{n}{m} = \frac{4}{7}$ wird. Man theile ab in so viel gleiche Theile, als der Nenner m Einheiten hat, hier also in sieben, beschreibe über ab einen Halbkreis und errichte in dem vierten — durch den Zähler n bestimmten — Theil e auf ab ein Loth ef, ziehe af und beschreibe damit aus a den Bogen fg. Zieht man nun ac und macht man gh # bc, ferner kh # cd, so ist

$$aghk = \frac{4}{7} abcd.$$

Beweis.

Es ist

1) $ab : af = af : ae$, und weil

2) $ag = af$ gemacht wurde, so ist auch

3) $ab : ag = ag : ac$, woraus

4) $ab : ae = \overline{ab}^2 : \overline{ag}^2$ folgt.

Da nun

5) $ae = \frac{n}{m} ab$, so wird, wenn man 5 nach 4 setzt,

6) $ab : \frac{n}{m} ab = \overline{ab}^2 : \overline{ag}^2$ oder

7) $1 : \frac{n}{m} = \overline{ab}^2 : \overline{ag}^2$.

Da nun

8) $abcd : aghk = \overline{ab}^2 : \overline{ag}^2$ ist, so wird daraus, wenn man 7 substituirt:

9) $abcd : aghk = 1 : \frac{n}{m}$, woraus

10) $aghk = \frac{n}{m} abcd$ wird. Und weil $\frac{n}{m} = \frac{4}{7}$ angenommen wurde, so muß auch

11) $aghk = \frac{4}{7} abcd$

seyn.

§. 682.

Im Falle bei der Aufgabe des vorigen §. der Bruch $\frac{n}{m}$ ein unechter Bruch ist, das heißt wenn $n > m$ ist, so wird die neue Figur größer als die gegebene. Obschon man auch hier in diesem Falle das gezeigte Verfahren anwendet, so mag doch, der größern Deutlichkeit wegen, diese Operation erläutert werden.

Es sey abcd (Fig. 634.) gegeben und man soll eine andere der abcd ähnliche Figur entwerfen, welche $\frac{3}{2}$ mal so groß als abcd ist, so wird, weil hier

$$\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$

ist, die ab bei k halbirt, ab so weit verlängert, bis bd $= ak = \frac{1}{2} ab$, das ist 3 Theile von den zweien der

ab geworden ist. Nun beschreibe man über ad den Halbkreis aed, errichte in b auf ad das Loth be, ziehe ae und beschreibe damit aus a den Bogen ef. Wird nun durch f die fg # bc und gh # cd gezogen, so ist:

$$afgh = \tfrac{3}{2}\, abcd.$$

Beweis.

Weil

1) $ab : af = af : ad$, so ist, da
2) $ad = \frac{3}{2}\, ab$ gemacht wurde:
3) $ab : af = af : \frac{3}{2}\, ab$, folglich
4) $af = ab\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Nun steht wegen der Aehnlichkeit der Figuren abcd und afgh:

5) $abcd : afgh = \overline{ab}^2 : (ab\sqrt{\frac{3}{2}})^2$, oder
6) $abcd : afgh = \overline{ab}^2 : \frac{3}{2}\,\overline{ab}^2$, das ist
7) $abcd : afgh = 1 : \frac{3}{2}$, woraus
8) $afgh = \frac{3}{2}\, abcd$

folgt.

§. 628.

Aufgabe.

Parallelogramme durch Rechnung zu theilen.

Auflösung.

Wenn z. B. das Rechteck abcd (Fig. 635.) in vier gleiche Theile getheilt werden soll, so suche man dessen Flächeninhalt und theile denselben durch die Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile die Figur getheilt werden soll: also hier durch 4. Diesen Quotient theile man durch die Zahl, welche das Maas derjenigen Seite bezeichnet, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen; der hierdurch erhaltene Quotient ist die Höhe eines jeden Theils.

Wenn z. B. $ab = 40°$ und $bc = 100°$ ist, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks $abcd = 4000\ \square°$.

Theilt man nun 4000 durch 4, so erhält man

$\frac{4000}{4} = 1000$. Diesen Quotient theile man nun durch 100, welches die Länge der Seite bc ist, mit welcher die Theillinien parallel gehen sollen, und man bekommt

$\frac{1000}{100} = 10°$ als das Maas der Höhe eines jeden Theils.

Macht man nämlich be = ef = fg = ag = 10° und zieht man durch e, f und g mit bc Parallelen, so ist das Rechteck nach Verlangen getheilt.

Beweis.

Setzt man den Inhalt des Rechtecks abcd = F, die Seite, mit welcher die Theilungslinien parällel gehen sollen, = S, so muß

$$be \times S = \frac{F}{n}$$

seyn, woraus

$$be = \frac{F}{nS} = \frac{F}{n} : S$$

erhalten wird.

Sollen aber die Theile ein bestimmtes Verhältniß unter einander haben, so berechne man zuvörderst den Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks und bestimme, wie groß jeder Theil nach den festgesetzten Verhältnissen werden muß.

Dann sage man:

Die Höhe eines jeden Theils verhält sich zu seinem Flächeninhalte wie die Seite, mit welcher die Theilungslinien nicht parallel gehen sollen, sich zum ganzen Inhalte der gegebenen Figur verhält.

Soll z. B. abcd. wo bc = 45° und cd = 20° seyn mag, in vier solche Theile getheilt werden, die sich verhalten wie die Zahlen 3, 4, 5 und 6, so berechne man also zuvörderst den Flächeninhalt von abcd: er ist 45 × 20 = 900 □°. Nun untersuche man, wie viel Quadratruthen jeder der vier Theile erhalten soll, indem man, weil 3 + 4 + 5 + 6 = 18 ist, ansetzt:

18 : 900 = 3 : Flächeninhalte des ersten Theils A,
18 : 900 = 4 : — — zweiten — B,
18 : 900 = 5 : — — dritten — C und
18 : 900 = 6 : — — vierten — D.

Hiernach wird

A = 150 □°,
B = 200 □°,
C = 250 □° und
D = 300 □° werden.

Jetzt sage man:

die Höhe des Theiles A : 150 = 45 : 900,
— — — — B : 200 = 45 : 900,
— — — — C : 250 = 45 : 900 und
— — — — D : 300 = 45 : 900.

Hieraus findet man

die Höhe für A = 7,5°,
— — — B = 10°,
— — — C = 12,5° und
— — — D = 15°.

Macht man nun bh = 7,5°,
hi = 10°,
ik = 12,5° und
ck = 15°,

und zieht man durch h, i und k Parallelen mit ab, so ist die Theilung beendet.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht aus dem Satze hervor:

Parallelogramme von einerlei Höhe verhalten sich wie die Grundlinien derselben.

Man kann indeß auch die Höhen der Theile nach folgender Regel finden:

man multiplicire die Seite, mit welcher die Theilungslinien nicht parallel gehen sollen, mit der Verhältnißzahl desjenigen Theils, dessen Höhe man sucht, und dividire das Product durch die Summe der Verhältnißzahlen.

Die Richtigkeit dieser Regel geht aus Nachstehendem hervor:

Es sey ab = a und bc = b.

Die Theile sollen sich wie die Zahlen m, n, o und p verhalten.

Ferner setze man m + n + o + p = S.

Da nun der Flächeninhalt des Rechtecks, nämlich

$$F = a \times b$$

ist, so müssen folgende Proportionen stattfinden:

$$S : a \times b = m : \frac{a \times b \times m}{S},$$

$$S : a \times b = n : \frac{a \times b \times n}{S},$$

$$S : a \times b = o : \frac{a \times b \times o}{S} \text{ und}$$

$$S : a \times b = p : \frac{a \times b \times p}{S}.$$

Sucht man z. B. b, so setze man ferner:

$$a \times b : b = \frac{a \times b \times m}{S} : \frac{b \times m}{S},$$

$$a \times b : b = \frac{a \times b \times n}{S} : \frac{b \times n}{S},$$

$$a \times b : b = \frac{a \times b \times o}{S} : \frac{b \times o}{S} \text{ und}$$

$$a \times b : b = \frac{a \times b \times p}{S} : \frac{b \times p}{S},$$

woraus obige Regel genommen wurde.

Hiernach würde nun das in diesem §. gegebene Beispiel auf folgende Art gelöst werden:

weil $S = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$, und der Flächeninhalt $a \times b = 900$, und die Seite $b = 45^o$ ist, so wird

die Höhe von $A = \frac{45 \cdot 3}{18} = 7{,}5^o$,

die Höhe von $B = \frac{45 \cdot 4}{18} = 10^o$,

die Höhe von $C = \frac{45 \cdot 5}{18} = 12{,}5^o$ und

die Höhe von $D = \frac{45 \cdot 6}{18} = 15$,

wie bei der vorigen Auflösung.

Noch leichter bekommt man die Höhe eines jeden Theils, wenn man dessen Flächeninhalt durch diejenige Zahl theilt, welche das Maas derjenigen Seite angibt, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen.

Ist nämlich der Flächeninhalt des

ersten Theils = A,
der des andern — = B,
— — dritten — = C und
— — vierten — = D,

so müssen ganz natürlich deren Höhen, da die Längen gleich sind, folgende seyn:

$$\text{Höhe von } A = \frac{A}{a},$$

$$\text{Höhe von } B = \frac{B}{a},$$

$$\text{Höhe von } C = \frac{C}{a} \text{ und}$$

$$\text{Höhe von } D = \frac{D}{a}.$$

Weil bei dem zweiten Beispiele der Flächeninhalt 900 □° die Länge 20° ist, und die Verhältnißzahlen 3, 4, 5 und 6 sind, so hat man zu den Flächeninhalten von 150 □°, von 200 □°, von 250 □° und von 300 □° die Höhen zu suchen. Diese sind:

$$\frac{150}{20} = 7{,}5,$$

$$\frac{200}{20} = 10,$$

$$\frac{250}{20} = 12{,}5° \text{ und}$$

$$\frac{300}{20} = 15°, \text{ wie zuvor.}$$

Soll aber ein Paralleltrapez so getheilt werden, daß die Theilungslinien auf die parallelen Seiten stoßen, so berechne man, wie bei dem Rechtecke geschah, den Inhalt eines jeden Theils und bestimme dann die Höhen, sowohl für **bc** (Fig. 636.) als auch für **ad**, nämlich für jede der parallelen Seiten, und ziehe die Theilpunkte zusammen.

Es sey z. B. **ad** = 96°, **bc** = 60° und die Höhe des Paralleltrapezes = 40°; ferner soll

der Theil **A** = 390 □°,
— — **B** = 520 □°,
— — **C** = 780 □° und
— — **D** = 1430 □° erhalten.

So setze man, weil 390 + 520 + 780 + 1430 = 3120 ist:

3120 : 60 = 390 : Höhe des Theils **A**,
3120 : 60 = 520 : — — — **B**,
3120 : 60 = 780 : — — — **C** und
3120 : 60 = 1430 : — — — **D**, woraus

die Höhe für A = 7,5°,
— — — B = 10°,
— — — C = 15° und
— — — D = 27,5° wird, welche auf b c kommt.

Um die Höhen, welche auf a d kommen, zu bestimmen, sage man:

3120 : 96 = 390 : Höhe des Theils A,
3120 : 96 = 520 : — — — B,
3120 : 96 = 780 : — — — C und
3120 : 96 = 1430 : — — — D, woraus

die Höhe für A = 12°,
— — — B = 16°,
— — — C = 24° und
— — — D = 44° wird.

Diese Theile werden auf a d getragen und hierauf die Theilungslinien e h, f i und g k gezogen, wodurch die Theilung vollzogen ist.

Soll das Parallelogramm a b c d (Fig. 637.) in mehrere, z. B. in vier gleiche Theile getheilt werden, so errichte man in d auf a d das Loth d e, mache oder bestimme den Flächeninhalt = d e × b c, theile denselben durch 4, weil das Parallelogramm in vier Theile getheilt werden soll, und den hierdurch gefundenen Quotient theile man noch durch diejenige Seite, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen, also hier durch b c: es geben diese Quotienten die Höhen d f, f g, g h und h e.

Oder:
man theile die Höhe d e in so viel gleiche oder unter sich in irgend einem Verhältniß stehende Theile, als deren das Parallelogramm enthalten soll, und lege durch die Theilungspunkte Linien, welche mit den Grundlinien a d oder b c parallel gehen.

§. 684.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez a b c d (Fig. 638.) nach einem bestimmten Verhältniß und zwar so zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem in einer der parallelen Seiten liegenden Punkte t gehen.

Auflösung.

Es soll sich der abgeschnittene Theil abet zu dem ganzen Paralleltrapez abcd wie n : m verhalten.

Der Kürze wegen setzt man:

$$ad = a,$$
$$bc = b,$$
$$ab = c,$$
$$cd = d,$$
$$at = f \text{ und}$$
$$be = x.$$

Nun steht

1) $abcd : abet = (a + b) : (f + x)$,

und ferner ist

2) $abcd : abet = (m : n)$, folglich auch

3) $m : n = (a + b) : (f + x)$, woraus man

4) $x = \frac{n}{m}(a + b) - f$ erhält.

Diesen für x gefundenen Werth trage man von b nach e und ziehe te; es ist sodann:

$$abet : abcd = n : m.$$

Sollte aber der Werth für x negativ werden, so liegt der Punkt e nicht mehr in bc, sondern in ab, etwa in f. Man setze daher

$$af = y,$$

ziehe die Theilungslinie und verbinde b mit t. Nun ist

1) $abcd : \triangle atb = (a + b) : f$,

ferner ist auch

2) $\triangle atb : \triangle atf = c : y$.

Verbindet man nun 1 mit 2, so erhält man

3) $abcd : \triangle atf = (a + b)c : f \times y$.

Nach der Aufgabe soll seyn:

4) $abcd : \triangle atf = m : n$; verbindet man nun 3 mit 4, so wird

5) $(a + b)c : f \times y = m : n$, woraus

6) $y = \frac{c \times n(a + b)}{m \times f}$

hervorgeht.

Findet man aber in der ersten Formel für x, daß

$x > b$, daß nämlich

$be > bc$

ist, so muß der Theilpunkt e auf die cd, etwa nach g,

fallen. Es sey daher tg die Theilungslinie und gd = z, so ist, wenn ct gezogen wird:

1) abcd : △ cdt = (a + b) : (a — f), und

2) △ cdt : △ dgt = d : z.

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

3) abcd : △ dgt = d(a + b) : z (a — f).

Nach der Aufgabe soll seyn:

4) abcd : abcgt = m : n, und folglich ist

5) abcd : △ dgt = m : (m — n).

Wird endlich 3 mit 5 verbunden, so erhält man

6) d (a + b) : z (a — f) = m : (m — n),

woraus

$$7)\ z = \frac{d\,(m-n)\,(a+b)}{m\,(a-f)}$$

wird.

§. 685.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 639.) aus dem in einer der nicht parallen Seiten liegenden Punkte t nach einem bestimmten Verhältniß zu theilen.

Auflösung.

Es sey der Kürze wegen ad = a,
bc = b,
at = c,
bt = d und
abcd = F.

Man ziehe ct und dt und berechne, in welchem Verhältniß die Dreiecke adt, cdt und bct zum Trapez abcd stehen; es läßt sich dann aus der Größe dieser Dreiecke und aus der Größe des abzuschneidenden Stücks beurtheilen, ob e auf ad, cd oder auf bc fallen wird.

Man ziehe ac und bd; es ist sodann

1) $\triangle atd : F = \overline{ad} \times \overline{at} : (\overline{at} + \overline{bt})\ (\overline{ad} + \overline{bc})$

oder der festgesetzten Bezeichnung wegen:

2) △ atd : F = a × c : (c + d) (a + b), woraus

$$3)\ \triangle atd = \frac{a \times c \times F}{(a+b)\,(c+d)}$$

erhalten wird.

Nun ist ferner

4) $\triangle$ bct : F = b × d : (a + b) (c + d),

woraus

5) $\triangle bct = \frac{b \times d \times F}{(a+b)\,(c+d)}$

folgt.

Nun ist

6) $\triangle cdt = abcd - \triangle adt - \triangle bct$, oder

7) $\triangle cdt = F - \frac{a \times c \times F}{(a+b)\,(c+d)} - \frac{b \times d \times F}{(a+b)\,(c+d)}$,

woraus man

8) $\triangle cdt = \frac{F\,(a \times d + b \times c)}{(a+b)\,(b+d)}$

erhält.

Will man nun von dem Trapez irgend einen bestimmten Theil abschneiden, so darf man nur eins dieser Dreiecke aus der Spitze t nach dem gegebenen Verhältniß theilen. Dies geschieht, wenn man die Grundlinie des Dreiecks nach diesem Verhältniß theilt.

Ein Beispiel wird das Verfahren verdeutlichen.

Es sey a = 120°,
b = 98°,
c = 46° und
d = 31°;

so ist wegen 3 der vorstehenden Entwickelung

9) $\triangle adt = 0{,}3288\ F$, und nach 4 wird

10) $\triangle bct = 0{,}1810\ F$; nach 8 aber ist

11) $\triangle cdt = 0{,}4902\ F$.

Will man nun den vierten Theil des Trapezes, nämlich 0,25 F*) abschneiden, so muß ad dergestalt in e getheilt werden, daß

12) ad : ae = 0,3288 : 0,25 wird.

Hierdurch erhält man, wenn man te zieht,

13) $\triangle tae = \frac{1}{4}\ F$.

Wollte man aber $\frac{2}{5}$ F haben, so müßte man zu dem Dreieck adt noch ein Dreieck

dtf = 0,66666 . . F — 0,3288 F = 0,3378 . . . F

hinzusetzen, und daher cd in f so theilen, daß

14) cd : df = 0,4902 . . F : 0,3378 . . . F wird,

---

*) Wenn nämlich F = 1 genommen ist.

und hiernach ist
15) adft = $\frac{2}{3}$ abcd.

§. 686.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 640.) dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien mit den parallelen Seiten der ab oder cd der Figur gehen, und daß das Stück abeh einen bestimmten Flächeninhalt hat.

Auflösung.

Auf ab errichte man in a ein Loth ag.
Ferner setze man der Kürze wegen:

ab = a,
cd = b,
ag = c,
af = x und
he = y.

Zieht man nun am # bd, so ist
1) cm = cd — ab, oder
2) cm = b — a.
Auch ist
3) hl = he — ab, oder
4) hl = y — a.
Nun steht
5) cm : hl = ag : af, das ist wegen 2 und 4, und wegen der angenommenen Bezeichnung:
6) (b — a) : (y — a) = c : x, woraus

$$7)\ x = \frac{c(y-a)}{b-a}$$

wird.
Weil

$$8)\ abeh = \frac{he + ab}{2} \times af,$$

so wird, wenn man abeh = F, welches bekannt ist, setzt:

$$9)\ F = \frac{(a+y)\,x}{2}$$

seyn, wenn man die angenommene Bezeichnung benutzt. Wird aber der Werth aus 7 nach 9 getragen, so bekommt man

10) $F = \frac{a + y}{2} \times \frac{(y - a)\, c}{b - a}$, woraus

11) $y = \frac{\sqrt{2F\,(b - a)}}{c} + a^2$ wird.

Trägt man endlich 11 nach 7, so wird die Höhe af des verlangten Paralleltrapezes abeh erhalten; es ist nämlich

11) $x = \frac{c}{b-a}\left[\sqrt{\frac{2(b - a)\, F}{c}} + a^2 - a\right]$.

§. 687.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 641.) ist durch ef in zwei ungleiche Theile getheilt. Man soll durch den in ab liegenden Punkt g eine Linie gh so ziehen, daß aghd = efcd, folglich bchg = abef werde.

Auflösung.

Zieht man dg, so wird

$$\triangle adg \gtrless efcd.$$

Ist es nun der Fall, daß $\triangle adg < efcd$ ist, so darf man nur ein

$$\triangle dgh = efcd - \triangle adg$$

hinzusetzen, von welchem eine Seite dh und ein Winkel gdh in der Figur abcd liegt.

Man verwandle zu dem Ende sowohl das Trapez cdef als auch das Dreieck adg in solche Parallelogramme, die eine Seite $= \frac{dg}{2}$ und den Winkel gdh enthalten (§. 543., §. 536., §. 530., §. 537.), ziehe das eine Parallelogramm von dem andern ab, verwandle den Rest in ein Dreieck, dessen Basis = dg ist oder man lege die zweite Seite des übrig gebliebenen Parallelogramms von d nach h und ziehe gh.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn das Dreieck adg größer als cdef ist.

Der Beweis
liegt in der Auflösung.

§. 688.

Aufgabe.

Ein Paralleltrapez abcd (Fig. 642.) ist durch eine mit den parallelen Seiten ab und cd gleichlaufende Linie ef getheilt; man soll durch eine gerade Linie gh zwei Stücke ahle und delg, welche bestimmte Flächeninhalte p und q haben, von dem Trapez abschneiden.

Auflösung und Beweis.

Wenn bi = m und
bk = n gesetzt wird und wenn
ahle = p,
delg = q endlich auch
el = y und
dg = z genommen wird, so ist:

1) $\left(\frac{x + z}{2}\right) n = p + q,$

2) $\left(\frac{x + y}{2}\right) m = p$ und

3) $\left(\frac{y + z}{2}\right) (n - m) = q,$ woraus

4) $x = \frac{m (p + q) + n p}{m n} - \frac{q}{n - m},$

5) $y = \frac{- m (p + q) + n p}{m n} + \frac{q}{n - m}$ und

6) $z = \frac{m (p + q) - n p}{m n} + \frac{q}{n - m}$ wird.

§. 689.

Aufgabe.

Ein Viereck abcd (Fig. 643.), welches durch eine gerade Linie ef, in zwei andere Vierecke adfe und bcfe getheilt ist, durch eine gerade Linie il so zu theilen, daß die Vierecke beki und ealk einen bestimmten Flächeninhalt haben.

Auflösung und Beweis.

Man verlängere bc und ad, ferner ef, bis man die Durchschnitte g und h erhält. Da nun abcd bekannt

und ef gegeben ist, so kann man die Dreiecke beg und aeh, so wie die Winkel g und h, nebst der Linie gh als bekannt annehmen. Weil ferner beki, so wie ealk der Größe nach gegeben sind, so sind auch die Flächeninhalte der Dreiecke gki und lhk bekannt.

Man setze daher der Kürze wegen:

$$\triangle gki = p,$$
$$\triangle lkh = q.$$
$$igk = \alpha$$
$$h = \beta \text{ und}$$
$$gh = a.$$

Wüßte man nun, wie groß gk und wie groß der Winkel gki ist, so wäre die Aufgabe gelöst. Ebenfalls der Kürze wegen setze man

$$gk = x \text{ und}$$
$$gki = \varphi.$$

Nun ist

$$1)\ \triangle gki = \frac{x^2 \sin\alpha \sin\varphi}{2 \sin gik}.$$

Und weil $gik = 180° - (\alpha + \varphi)$ ist, so ist auch $\sin gik = \sin(\alpha + \varphi)$ und es wird daher aus 1:

$$2)\ \triangle gki = \frac{x^2 \sin\alpha \sin\varphi}{2 \sin(\alpha + \varphi)} = p.$$

Ferner ist

$$3)\ \triangle lkh = \frac{(a-x)^2 \sin\beta \sin\varphi}{2 \sin(\beta + \varphi)} = q;$$ und aus 2 erhält man

$$4)\ 2p \sin(\alpha + \varphi) = x^2 \sin\alpha \sin\varphi;$$ aus 3 aber wird

$$5)\ 2q \sin(\beta + \varphi) = (a-x)^2 \sin\beta \sin\varphi,$$ und aus 4 und 5 wird:

$$6)\ 2p \sin\alpha \cos\varphi + 2p \cos\alpha \sin\varphi = x^2 \sin\alpha \sin\varphi,$$ und

$$7)\ 2q \sin\beta \cos\varphi + 2q \cos\beta \sin\varphi = (a-x)^2 \sin\beta \sin\varphi.$$

Theilt man 6 durch $\sin\alpha \cdot \sin\varphi$ und 7 durch $\sin\beta \sin\varphi$, so wird:

$$8)\ \frac{2p \sin\alpha \cos\varphi}{\sin\alpha \sin\varphi} + \frac{2p \cos\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha \sin\varphi} = \frac{x^2 \sin\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha \sin\varphi}$$

und

$$9)\ \frac{2q \sin\alpha \cos\varphi}{\sin\beta \sin\varphi} + \frac{2q \cos\beta \sin\varphi}{\sin\beta \sin\varphi} = \frac{(a-x)^2 \sin\beta \sin\varphi}{\sin\beta \sin\varphi}$$

Kürzt man nun 8 und 9 ab, so erhält man

10) $2p \operatorname{cotg} \varphi + 2p \operatorname{cotg} \alpha = x^2$ und

11) $2q \operatorname{cotg} \varphi + 2q \operatorname{cotg} \beta = (a-x)^2$

Aus 10 wird:

12) $\operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x^2}{2p}$ und aus 11 erhält man:

13) $\operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \beta = \frac{(\alpha - x)^2}{2q}$.

Zieht man 12 von 13 ab, so ist:

14) $\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha = \frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p}$.

Da nun

15) $\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ ist, so muß

wenn 15 nach 11 kommt:

16) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p}$

werden. Aus dieser Gleichung bekommt man

17) $x^2 - \frac{2apx}{p-q} = \frac{2pq \sin(\alpha-\beta)}{(p-q) \sin \alpha \sin \beta} - \frac{a^2 b}{p-q}$,

woraus endlich:

18) $x = \frac{a}{p-q}\left[p \pm \sqrt{pq + \frac{2pq(p-q)\sin(\alpha-\beta)}{a^2 \sin \alpha \sin \beta}}\right]$

gefunden wird. Da nun x bekannt ist, so kann man aus 12 auch φ bestimmen; es ist nämlich

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{x^2}{2p} - \operatorname{cotg} \alpha.$$

Im Fall $\alpha = \beta$ ist, so wird $\sin(\alpha-\beta) = 0$ und aus 17 wird dann

19) $x = \frac{a}{p-q}[p \pm \sqrt{pp}]$.

Setzt man $p = q$, so wird aus 17:

$$x = \frac{a}{p-p}[p \pm \sqrt{p^2}] \text{ oder}$$

20) $x = \frac{a}{0}(p \pm p)$ und es ist daher entweder

21) $x = \frac{2ap}{0} = \infty$ oder

22) $x = \frac{0}{0}$,

Der Werth aus 21 kann gar nicht gebraucht werden und der Werth aus 22 ist unbestimmt. Man findet indeß aus 12 und 13, für diesen besondern Fall, den Werth für x, wenn man 13 von 12 abzieht; es ist dann

$$23)\ x = \frac{p}{a}(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) + \frac{a}{2},$$

oder wegen 15:

$$24)\ x = \frac{p \sin(\alpha-\beta)}{a \sin\alpha \sin\beta} + \frac{a}{2}.$$

Wäre hier überdies noch

$\alpha = \beta$, so würde

$$25)\ x = \frac{a}{2}$$ seyn.

Beispiel.

Ein viereckiges Feld **abcd** ist durch einen Graben **ef** in zwei ungleiche Theile getheilt und zwar ist **bcfe** eine Wiese und **adfe** ein Acker. Man soll dies Terrain durch **il** so theilen, daß das Stück Wiese **beki** einen Flächeninhalt von 2600 □Ruthen und das Ackerstück **aekl** einen Flächeninhalt von 2900 □Ruthen bekommt.

Wenn nun $g = \alpha = 40^\circ\ 40'$,
$h = \beta = 18^\circ\ 26'$,
$gh = 228$ Ruthen,
$\triangle beg = 480$ □Ruthen und
$\triangle aeh = 6488$ □Ruthen

enthält, wie wird dann die Linie **il** gezogen werden müssen?

Auflösung.

Weil $\triangle gik = \triangle beg + bike$, so ist auch

1) $gik = 480 + 2600 = 3080 = p$ und weil
$\triangle lkh = \triangle aeh - aekl$ ist, so muß
2) $\triangle lkh = 6488 - 2900 = 3588 = q$ seyn.

Setzt man nun in 18 der hier gegebenen allgemeinen Entwickelung der Aufgabe der Kürze wegen

$$\frac{2pq(q-p)\sin(\alpha-\beta}{a^2 \sin\alpha \sin\beta} = u,$$ so wird

$$x = \frac{q}{q-p}(\pm\sqrt{pq-u} - p)\ *).$$

---

*) Weil $p < q$ in unserm Beispiele ist, so wurde q positiv und p negativ genommen.

Nun ist

$$\log u = [\log 2p + \log q + \log(q - p) + \log \sin(\alpha - \beta)] - [2 \log a + \log \sin \alpha + \log \sin \beta]$$

$$\log u = [\log 6160 + \log 3588 + \log 508 + \log \sin 22° 14'] - [2 \log 228 + \log \sin 40° 4' + \log \sin 18° 26']$$

$$\log u = 9{,}6282243 - 4{,}0298522 = 5{,}5983721,$$ woraus

$$u = 396617{,}63$$ wird.

Es ist daher

$$\pm \sqrt{pq - u} = \pm 3264{,}11$$ und folglich ist

$$x = \frac{228}{508}(3264{,}11 - 3080) = 82{,}63$$ *).

Die Entfernung des Punkts k von g ist also bestimmt und es ist daher nur noch φ zu entwickeln.

Da nun aus 12

$$\cot g\, \varphi = \frac{x^2}{2p} - \cot g\, \alpha$$

gefunden wurde, so ist

$$\cot g\, \varphi = \left(\frac{82{,}63}{2 \cdot 3080}\right)^2 - 1{,}16397 \ldots$$ oder

$$\cot g\, \varphi = -0{,}05558 \ldots,$$ folglich

$$\varphi = 93° 10'.$$

Wird nun, nachdem gk = 82,63 gemacht worden, der Winkel gki = 93° 10′ abgesteckt, so ist die il bestimmt und die Theilung vollzogen.

§. 690.

Aufgabe.

Ein reguläres Polygon abcdef oder iklmn (Fig. 644.) in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Ist die Zahl, welche anzeigt, wie viel Seiten das Polygon hat, eine gerade, ist die Seitenanzahl des Polygons paar, so verbinde man die Halbirungspunkte g und h zweier gegenüber liegenden Seiten ab und de durch eine gerade Linie gh; oder man verbinde die Scheitel b und e zweier einander gegenüber liegender Winkel (Diametrale) durch eine gerade Linie be.

---

*) Hier konnte aus ganz nahe liegenden Gründen nur der positive Werth von 3264,11 genommen werden.

Ist aber die Seitenanzahl des Polygons **iklmn** unpaar, so verbinde man den Halbirungspunkt **o** einer Seite **ik** mit dem Scheitel **m** des der Seite gegenüber liegenden Winkels durch die **mo**, welche allemal durch den Mittelpunkt **p** gehen muß.

§. 691.

Verbindet man bei einem regulären Vielecke **qrstuv** (Fig. 644.) das Centrum **w** desselben mit den Scheiteln der Polygonwinkel, so wird dadurch bekanntlich das Vieleck in so viel gleiche Theile getheilt, als das Polygon Seiten hat.

§. 692.

Aufgabe.

Ein reguläres Polygon von ungleicher Seitenanzahl so zu halbiren, daß die Theilungslinie mit einer Seite parallel geht.

Auflösung.

Das Polygon ist **abcde** (Fig. 645.) und **ab** dessen Seite, mit welcher die Theilungslinie **on** parallel gehen soll.

Man verlängere die beiden Seiten **bc** und **ae**, zwischen welchen die **ab** liegt, bis die Verlängerungen sich in **i** treffen, halbire **ae** in **g** und beschreibe über **ie** einen Halbkreis **ipe**. Wird nun in **g** auf **ie** ein Loth errichtet, **ip** gezogen und damit aus **i** der Bogen **pn** beschrieben, so erhält man den Punkt **n**, durch welchen die gesuchte Theilungslinie **no** # **ab** gezogen wird.

Beweis.

Man verbinde **g** mit **c** durch die **cg** und ziehe **ce**.
Weil 1) $\triangle ice \backsim \triangle ion$, so steht
2) $\triangle ice : \triangle ion = \overline{ie}^2 : \overline{in}^2$.
Wegen der Konstruction ist
3) $ie : ip = ip : ig$, oder weil
4) $in = ip$ gemacht wurde, so wird aus 3, wenn man 4 subſtituirt:
5) $ie : in = in : ig$.
Hieraus erhält man
6) $ie^2 : in^2 = ie : ig$.
Verbindet man nun 6 mit 2, so ist

7) △ice : △ion = ie : ig.

Nun ist aber auch

8) △ice : △icg = ie : ig und es wird aus 7 und 8:

9) △ice : △ion = △ice : △icg,

folglich muß:

10) △ion = △icg werden.

Nimmt man nun von 10 das Dreieck abi weg, so bleibt

11) abon = abcg. Weil nun

12) abcg = $\frac{1}{2}$ abcde ist, so folgt

13) abon = $\frac{1}{2}$ abcde.

§. 693.

Aufgabe.

Ein reguläres Polygon von paarer Seitenanzahl in vier gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Das zu theilende Polygon sey ein Sechseck.

Man theile jede zwei einander gegenüber liegende Seiten ab und de (Fig. 646.) bei g und h in die Hälfte, ziehe gh und verbinde die Scheitel c und f zweier solcher Figurenwinkel, die diametral und dergestalt liegen, daß eben diese Verbindungslinie cf auf gh lothrecht steht. Es ist dann

afig = bcig = cdhi = efih = $\frac{1}{4}$ abcdef.

Der Beweis

liegt in der Auflösung.

§. 694.

Aufgabe.

Ein reguläres Fünfeck abcde (Fig. 647.) in vier gleiche Theile zu theilen, so daß eine Theillinie gh mit einer Seite ab parallel geht, die andere Theillinie df aber lothrecht auf ab steht.

Auflösung.

Man halbire ab in f und verbinde d mit f durch df. Nun halbire man abcd (nach §. 692.) durch gh ∥ ab und es ist sodann

degi = afig = bfih = cdih = $\frac{1}{4}$ abcde.

Ein Beweis

für dieses Verfahren ist überflüssig, da die Richtigkeit desselben in die Augen springt.

§. 695.

Aufgabe.

Ein reguläres paares Polygon abcdef (Figur 648.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinien gh aus einem in einer Seite de desselben liegenden Punkte g geht.

Auflösung.

Auf der der Seite de gegenüber liegenden Seite ab nehme man die ah = dg und verbinde g mit h, es ist dann

afegh = bcdgh.

§. 696.

Aufgabe.

Ein reguläres paares Polygon abcdef (Figur 649.) dergestalt in zwei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie lm durch einen in dem Polygon liegenden Punkt g geht.

Auflösung.

Von g fälle man auf de ein Loth gh, mache ai = dh, errichte in i auf ab ein Loth ik = gh und ziehe durch g und k die Linie lm: es ist sodann

afelm = bcdlm.

§. 697.

Aufgabe.

Ein reguläres Fünfeck abcde (Fig. 650.) so in zwei Theile zu theilen, daß die Theillinie on aus einem in einer Seite cd liegenden Punkt o geht.

Auflösung.

Man halbire ae in h, ziehe ch, verbinde o mit h, mache cn ∥ oh und ziehe die on, wodurch die Theilung vollzogen ist.

Beweis.

Wenn man ce und die df ∥ ce zieht, die ae bis f verlängert, so ist

1) △ cfh = cdeh

und da ch aus dem Halbirungspunkte h geht, so ist auch

2) cdeh = ½ abcde = abch; ferner ist

3) △ cop = △ hnp und demnach auch

4) △ cop + abcpn = △ hnp + abcpn oder

5) abcon = abch; folglich wegen 2:

6) abcon = ½ abcde.

§. 698.

Aufgabe.

Ein irreguläres Fünfeck abcde (Fig. 651.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie aus einem in einer Seite ab liegenden Punkte f geht.

Auflösung.

Man ziehe ad und bd, mache eg # ad und ch # bd, verlängere ab auf beiden Seiten, wodurch die gh bestimmt wird. Theilt man nun die gh bei i in zwei gleiche Theile und zieht man df, ferner ik # df, so ist, wenn f und k durch die kf verbunden wird, die Theilung vollzogen.

Beweis.

Es ist, wenn man dg, di und dh zieht:

1) △ dig = aedi, ferner

2) △ dih = bcdi, folglich auch

3) △ dig + △ dih = aedi + bcdi oder

4) △ dgh = abcde.

Da nun nach der Konstruction

5) △ dig = ½ △ dgh, so ist auch wegen 4:

6) △ dig = ½ abcde.

Und weil

7) △ dok = △ fio, so muß auch

8) △ dok + aedof = △ fio + aedof oder

9) aedkf = aedi seyn, folglich ist wegen 1:

10) aedkf = △ dig oder wegen 6:

11) aedkf = ½ abcde.

§. 699.

Aufgabe.

Ein irreguläres Fünfeck abcd (Fig. 652.) dergestalt zu halbiren, daß die Theilungslinie lm mit einer Polygonseite ao parallel geht.

Auflösung.

Man mache das Dreieck dfg = abcde, halbire fg in h, ziehe dh, mache di # ae und verlängere de und ab, bis der Punkt k bestimmt wird.

Nun suche man zu kh und ki die mittlere Proportionale (§. 200.) kl, sie bestimmt den Punkt l, durch welchen die Theilungslinie lm # ae gelegt wird.

Beweis.

Weil

1) △kdi ∽ △klm, so steht

2) △kdi : △klm = $\overline{ki}^2 : \overline{kl}^2$.

Nach der Konstruction ist aber

3) kh : kl = kl : ki, woraus

4) kl^2 = kh × ki wird.

Setzt man nun 4 nach 2, so erhält man

5) △kdi : △klm = $\overline{ki}^2$: kh × ki, oder

6) △kdi : klm = ki : kh.

Nun ist aber auch

7) △kdi : △kdh = ki : kh, folglich durch die Verbindung der Proportionen 6 und 7:

8) △kdi : △kdh = △kdi : △klm, woraus

9) △kdh = △klm gefunden wird.

Zieht man von 9 das Dreieck kea ab, so wird

10) △kdh — △kea = △klm — △kea oder

11) aedh = aeml werden. Nun ist aber

12) aedh = △dfh = $\frac{1}{2}$ △dfg = $\frac{1}{2}$ abcde, folglich muß auch

13) aeml = $\frac{1}{2}$ abcde seyn.

§. 700.

Aufgabe.

Ein irreguläres Fünfeck abcde (Fig. 653a) so in zwei Theile zu theilen, daß die Theilungslinie mn aus der Mitte n einer Seite ab des Fünfecks geht.

Auflösung.

Man mache das △abh = abcde (§. 545.), ziehe hn und fälle von n und h auf die de die Lothe hl und kn. Nun suche man zu kn, hl und ie die vierte Proportionallinie im (§. 203.), wodurch in de der Punkt m

erhalten wird, der so liegt, daß, wenn man denselben mit n durch eine gerade Linie verbindet, wenn man nämlich mn zieht,

aemn = bcdmn ist.

Beweis

Weil

1) **kn : hl = ie : im**, so ist auch
2) **nk × im = hl × ie** und ebenfalls ist
3) $\frac{nk \times im}{2} = \frac{hl \times ie}{2}$, woraus
4) **△imn = △ehi** erfolgt.

Setzt man dieser Gleichung **aein** hinzu, so wird

5) **△imn + aein = △ehi + aein** oder
6) **aemn = △ahn** werden.

Nun ist aber

7) **△ahn = ½ △abh** und nach der Konstruction ist
8) **△abh = abcde**, folglich muß durch die Verbindung der Werthe aus 6, 7 und 8 folgen, daß
9) **aemn = ½ abcde** ist.

§. 701.

Aufgabe.

Ein irreguläres Fünfeck **abcde** (Fig. 653b) dergestalt zu halbiren, daß sich die Theile wie zwei gerade Linien **ai** und **il** verhalten und daß die Theillinie aus einem Figurenwinkel **d** geht.

Auflösung.

Man verwandle das Fünfeck in ein Dreieck **dfg** (§. 545.) und theile dann die Seite **fg** nach dem Verhältniß der Linien **ai** und **il**, so daß

ai : il = fh : gh

wird. Zieht man nun **dh**, so ist die Theilung vollzogen.

Beweis.

Es ist 1) **△dfh = aedh** und eben so ist auch
2) **△dgh = bcdh.**

Nun steht aber

3) **△dfh : △dgh = fh : hg.**

Nach der Auflösung ist aber

4) **ai : il = fh : hg,**

daher, wenn man 3 nach 4 setzt:

5) △dfh : △dgh = ai : il;

und wenn man nach 5 die Werthe aus 1 und 2 bringt, so wird

6) aedh : bcdh = ai : al.

§. 702.

Aufgabe.

Ein reguläres Fünfeck abcde (Fig. 654.) dergestalt in drei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem in der Seite cd liegenden Punkt o gehen.

Auflösung.

Man ziehe ac und mache bf # ac; ferner ziehe man ce und dg # ce; verlängere die ae auf beiden Seiten bis f und g und mache fh = $\frac{1}{3}$ fg, ziehe oh und cn # oh; es ist dann n ein Punkt, durch welchen no gezogen wird, um ein Drittel von abcde abzuschneiden. Nun ziehe man oe, mache di # oe und theile ni bei m in die Hälfte. Wird nun om gezogen, so ist

abcon = △mno = demo = $\frac{1}{3}$ abcde.

Beweis.

Zieht man cf, ch, cg und oi, so ist

1) △cfh = abcon.

Ferner ist:

2) △cfh = $\frac{1}{3}$ △cfg; folglich

3) abcon = $\frac{1}{3}$ △cfg.

Nun ist:

4) △cfg = abcde gemacht worden, weshalb denn, wenn man 3 nach 4 trägt:

5) abcon = $\frac{1}{3}$ abcde wird.

Der Konstruction nach ist

6) △noi = node und

7) △mno = $\frac{1}{2}$ △noi;

daher auch

8) △mno = $\frac{1}{2}$ node wird.

Und weil, wenn man den Werth aus 5 von abcde wegnimmt:

9) node = $\frac{2}{3}$ abcde bleibt, so muß auch, wenn 9 nach 8 gesetzt wird:

10) $\triangle$ mno $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$ abcde oder
11) $\triangle$ mno $=\frac{1}{3}$ abcde seyn.

§. 703.

Aufgabe.

Ein irreguläres Fünfeck abcde (Fig. 655.) in mehrere, etwa drei gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien aus einer Spitze d der Figur gehen.

Auflösung.

Man ziehe ad und bd, mache ef # ad und cg # bd und verlängere ab auf beiden Seiten bis h und g. Theilt man nun fg bei h und i in drei gleiche Theile und zieht man dh und di, so ist

aedh $=\triangle$ dhi $=$ bcdi $=\frac{1}{3}$ abcde.

Beweis.

Nach der Konstruction ist, wenn man df und dg zieht:

1) $\triangle$ dfg $=$ abcde.

Nun ist aber auch ebenfalls der Auflösung wegen

2) $\triangle$ dfh $=\triangle$ dhi $=\triangle$ dgi $=\frac{1}{3}\triangle$ dfg;

und weil

3) $\triangle$ dfh $=$ aedh und
4) $\triangle$ dgi $=$ bcdi ist, so muß, wenn 3 und 4 nach 2 gesetzt wird:
5) aedh $=\triangle$ dhi $=$ bcdi $=\frac{1}{3}\triangle$ dfg $=\frac{1}{3}$ abcde seyn.

§. 704.

Aufgabe.

Ein unregelmäßiges Fünfeck abcde (Fig. 656.) dergestalt in mehrere (etwa in drei) gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien aus einem innerhalb der Figur liegenden Punkte f gehen.

Auflösung.

Man ziehe ac und ad, mache bg # ac und eh # ad, verlängere cd auf beiden Seiten, wodurch man das $\triangle$ agh $=$ abcde macht. Nun ziehe man fg und fh, mache ai # fg und ak # fh, wodurch, wenn man fi und fk zieht, das $\triangle$ fki $=\triangle$ agh gemacht wird.

Theilt man nun die ik bei l und m in drei gleiche Theile, und verbindet man diese Theilpunkte, wenn sie innerhalb der Seite cd liegen, mit f, und zieht man af, so ist die Theilung vollzogen. Fällt aber ein Punkt m, oder fallen mehrere Punkte außerhalb der cd, so ziehe man df, mache mn # df und es wird, wenn man fn zieht,

abclf = ldnf = aenf = $\frac{1}{3}$ abcde

werden.

Beweis.

Bei der Auflösung wurde

1) △ agh = abcde, und
2) △ fki = △ agh gemacht, und es ist daher
3) △ fki = abcde.

Und weil wiederum der Konstruction wegen

4) △ ifl = △ mfl = △ fmk = $\frac{1}{3}$ △ fki ist, so muß wegen 3

5) △ ifl = △ flm = △ fmk = $\frac{1}{3}$ abcde seyn.

Nun ist aber

6) △ ifl = abclf und
7) △ flm = fldn,

folglich muß aus 5, wegen 6 und 7 werden:

8) abclf = fldn = △ fmk = $\frac{1}{3}$ abcde.

Da nun aber

9) △ fmk = aenf ist, so wird
10) abclf = fldn = aenf = $\frac{1}{3}$ abcde werden.

§. 705.

Aufgabe.

Ein unreguläres Fünfeck abcde (Fig. 657.) in mehrere (etwa in drei) gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien aus zwei in einer Seite de liegenden Punkten o und p gehen.

Auflösung.

Man ziehe ad und bd, mache ef # ad und cg # bd, verlängere ab auf beiden Seiten, wodurch △ dfg = abcde wird. Nun theile man fg in drei gleiche Theile, wodurch fh = $\frac{1}{3}$ fg wird, ziehe ho und mache di # oh, wodurch man, wenn oi gezogen wird, aedoi = $\frac{1}{3}$ abcde erhält. Verwandelt man jetzt bcoi in das Dreieck iol, und theilt man dessen Seite li bei m in die

Hälfte, so ist, wenn pm gezogen und on # pm gemacht wird, np die andere Theilungslinie, wodurch iopn = bcpn = $\frac{1}{3}$ abcde wird.

Beweis.

Es ist

1) △ dfg = abcde und
2) aedoi = $\frac{1}{3}$ △ dfg, daher
3) bcoi = $\frac{2}{3}$ △ dfg = $\frac{2}{3}$ abcde.

Weil ferner

4) △ oil = bcoi und
5) inpo = $\frac{1}{2}$ △ oil, so muß auch wegen 5 und 4
6) inpo = $\frac{1}{2}$ bcoi seyn, oder wenn 6 nach 3 kommt:
7) inpo = $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{3}$ abcde, das ist
8) inpo = $\frac{1}{3}$ abcde werden.

Endlich muß auch

9) bcpn = $\frac{1}{3}$ abcde seyn, was bewiesen werden sollte.

§. 706.

Aufgabe.

Ein unregelmäßiges Sechseck abcdef (Fig. 658.), in welchem zwei Seiten ab und de parallel sind, in mehrere (etwa in drei) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe ae und bd, mache fg # ae und ch # bd, verlängere de auf beiden Seiten, so daß, wenn ag und bh gezogen werden, abhg = abcdef wird. Nun theile man jede der Linien ab und hg in drei gleiche Theile und ziehe kl und im; es ist dann afekl = iklm = bcdim = $\frac{1}{3}$ abcdef.

Beweis.

Es ist das Paralleltrapez abhg durch die kl und im in drei gleiche Theile getheilt worden, und da

abhg = abcdef

nach der Konstruction ist, so muß auch das gegebene Sechseck nach Verlangen getheilt seyn.

§. 707.

Aufgabe.

Jedes Polygon abcde (Fig. 659.) nach einem bestimmten Verhältniß dergestalt in zwei Theile zu theilen, daß der eine Theil der ganzen Figur ähnlich wird.

Auflösung.

Man theile irgend eine Seite ab in f, nach dem gegebenen Verhältniß, so daß, wenn das abzuschneidende Stück sich zur ganzen Figur wie n : m verhalten soll,

af : ab = n : m

wird. Ueber ab beschreibe man einen Halbkreis, errichte in f auf ab das Loth fg, beschreibe aus a mit ag den Bogen gh und ziehe hi # bc, bis an die Diagonale ac, ziehe ik # cd, mache kl # de und es ist sodann:

ahikl : abcde = n : m.

Beweis.

Der Aehnlichkeit der Figuren ahikl mit abcde wegen steht

1) $\overline{ahikl}^{2} : \overline{ab}^{2} = ah : ab.$

Nun ist

2) ab : ag = ag : af, oder

3) ab : ah = ah : af, woraus

4) $\overline{ab}^{2} : \overline{ah}^{2} = ab : af$

wird. Trägt man 4 nach 1, so erhält man:

5) ahikl : abcde = af : ab.

Da nun

6) af : ab = n : m

ist, so wird aus 6 und 5

7) ahikl : abcde = n : m (§. 681.).

§. 708.

Aufgabe.

Eine geradlinige Figur abcde (Fig. 660.) in eine beliebige Anzahl gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Die Figur soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Man mache das Dreieck agh = abcde, ziehe die af aus dem Scheitel a des Dreiecks agh in beliebiger Lage, theile ak bei l und m der Forderung gemäß in drei gleiche Theile, ziehe cl, cm, ferner dl und dm, mache gr # cl, gn # cm, vh # dl und ho # dm. Zieht man nun lr, mn, lv und mo, so ist cdomn = nmovlr = abrlve = $\frac{1}{3}$ abcde.

Beweis.

Nach der Konstruction ist

1) △ agh = abcde,
2) △ akh = akde und
3) △ agk = abck;

ferner ist

4) odkm = △ hkm und
5) vdkl = △ hkl.

Nun ist

6) mk = $\frac{1}{3}$ ak und
7) lk = $\frac{2}{3}$ ak, folglich muß
8) △ hkm = $\frac{1}{3}$ △ akh und
9) △ hkl = $\frac{2}{3}$ △ akh seyn.

Wegen 2, 8 und 9 ist

10) △ hkm = $\frac{1}{3}$ akde, und
11) △ hkl = $\frac{2}{3}$ akde.

Bringt man 4 nach 10 und 5 nach 11, so wird

12) odkm = $\frac{1}{3}$ akde und
13) vdkl = $\frac{2}{3}$ akde.

Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daß

14) ckmn = $\frac{1}{3}$ abck und
15) cklr = $\frac{2}{3}$ abck ist; folglich muß
16) cdomn = $\frac{1}{3}$ abcde und
17) cdvlr = $\frac{2}{3}$ abcde seyn.

§. 709.

Aufgabe.

Von einer vielseitigen irregulären Figur mehrere Stücke dergestalt abzuschneiden, daß die Theilungslinien mit einer gegebenen Linie parallel gehen.

Auflösung und Beweis.

Das Feld CD (Fig. 661.) soll in vier Theile von bestimmter Größe CEHGF, HIKG, IMLK und

MNDL so getheilt werden, daß die Theilungslinien mit AC parallel gehen.

Auf der gegebenen Linie AC errichte man das Loth AB und ziehe darauf aus allen Figurenwinkeln Parallelen mit AC. Hierdurch erhält man auf AB die Punkte a, b, c, d, e, f, g und h. Nun messe man auf AB von A an alle Entfernungen Aa, Ab, Ac, Ad, Ae, Af und Ag, und berechne hierauf alle Trapeze der gegebenen Figur und setze die Inhalte der vier Theile von C an etwa = m, n, o und p. Jetzt berechne man das Dreieck 1, setze hierzu den Inhalt des ersten Trapezes 2 und sehe zu, ob die Summe dieser Flächeninhalte = m ist. Da sie bei der hier gegebenen Figur kleiner als m ist, so muß die Theilungslinie innerhalb des Trapezes fF$\beta\alpha$ fallen, und es liegt daher nur daran, die FG, oder was vortheilhafter ist, die bx zu finden.

Nun findet man aber die bx nach §. 663., wodurch auch die GH erhalten wird; und es ist dann

CEHGF = m.

An CEHGF liegt der Rest des Trapezes 3, zu welchem man, wenn es nöthig ist, das Trapez 4 nimmt, und zusieht, ob die Summe derselben, nämlich GHlk = n oder $\gtrless$ n ist. Da die Summe dieser Flächen in der hier als Beispiel genommenen Figur kleiner als n ist, so muß die Theilungslinie IK innerhalb des Trapezes klvO, das ist innerhalb des Trapezes 5 fallen, wenn zuvor nach §. 663. der Punkt y auf AB bestimmt wurde.

Auf ähnliche Art verfährt man, um die Theilungslinie LM durch Bestimmung des Punktes z auf AB zu erhalten, welche in dem Trapeze 7 liegt, und es ist dann IKLM = o und DLMN = p.

§. 710.

Aufgabe.

Eine Kreisfläche durch koncentrische Kreise in mehrere gleiche oder solche Theile zu theilen, die unter sich ein bestimmtes Verhältniß haben.

Auflösung.

Man theile den Halbmesser ac (Fig. 662.) in so viel (etwa drei) gleiche oder solche Theile, die zu einander

dasselbe Verhältniß haben, welches die Theile des Kreises erhalten sollen, bei d und e, beschreibe über ac einen Halbkreis, errichte in d und e auf ac die Lothe df und eg, beschreibe aus c mit cf und cg die Bogen fh und gi, wodurch auf ac die ch und ci erhalten wird, welches die Halbmesser der Theile der Kreisfläche sind. Es ist nämlich der mit ch beschriebene Kreis ein Drittel des mit ac beschriebenen Kreises und der mit ci beschriebene Kreis ist zwei Drittel der gegebenen Kreisfläche. Es ist demnach der Kreis
A = Ringfläche B = der Ringfläche C = $\frac{1}{3}$ der gegebenen Kreisfläche.

Beweis.

Man setze der Kürze wegen die Fläche des gegebenen Kreises = F, die Fläche des mit ch beschriebenen Kreises = f, den Radius ac = R und ch = r.

Nun steht

1) cd : ch = ch : ac,

oder da

2) cd = $\frac{1}{3}$ R ist:

3) $\frac{1}{3}$ R : r = r : R,

woraus

4) $\frac{1}{3}$ R^2 = r^2 wird.

Nun ist aber ferner

5) F : f = R^2 : r^2,

folglich

6) $r^2 = \frac{f R^2}{F}$.

Setzt man 6 nach 4, so erhält man

7) $\frac{R^2}{3} = \frac{f R^2}{F}$, woraus

8) $f = \frac{F}{3}$ erhalten wird.

Da man nun auf ähnliche Art findet, daß

9) Kreisfläche mit ci beschrieben = $\frac{2}{3}$ F ist, so muß, wenn 8 von 9 genommen wird,

10) Ringfläche B = $\frac{1}{3}$ F,

und daher auch

11) C = $\frac{1}{3}$ F

werden, was zu beweisen war.

§. 711.

Aufgabe.

Ein Trapez abcd (Fig. 663.) dergestalt, etwa in zwei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie mit einer außerhalb des Trapezes liegenden geraden Linie mn parallel gehe.

Auflösung.

Man verlängere die ab und cd so weit, bis sie sich in g treffen, ziehe bd, mache ce # bd, theile ae in so viel gleiche Theile, als deren das Trapez enthalten soll, hier also bei f in die Hälfte, beschreibe über ag einen Halbkreis, fälle von f auf ag das Loth fo, mache gh = go, ziehe hi # ad und hp # mn. Jetzt beschreibe man über pg einen Halbkreis, errichte auf dg in i das Loth iq und mache rg = qg. Zieht man nun rs # mn, so ist adrs = $\frac{1}{2}$ abcd.

Beweis.

Daß 1) adih = $\frac{1}{2}$ abcd, ist bereits §. 668. bewiesen.

Zieht man nun dt # mn, so ist nach der Konstruction

2) drst = diht (§. 563.) und daher
3) drst + △adt = diht + △adt oder
4) adrs = adih, folglich wegen 1:
5) adrs = $\frac{1}{2}$ abcd.

§. 712.

Aufgabe.

Einen Halbkreis durch eine mit dem Durchmesser parallel laufende Sehne zu halbiren.

Auflösung und Beweis.

Wenn de (Fig. 664.) die Halbirungslinie ist, so ist es einleuchtend, daß man nur den Winkel acd zu bestimmen hat, um den Punkt d in der Peripherie zu finden, durch welchen die Sehne de # ab gezogen wird, die den Halbkreis halbirt. Um diesen Winkel bestimmen zu können, ziehe man ce setze den Centriwinkel dce = φ und suche denselben dadurch, daß man den Kreisausschnitt cdfe ermittelt und eine Gleichung zwischen φ und dem Halbmesser bildet, woraus dann φ bestimmt wird.

Es ist

1) Der Flächeninhalt des Halbkreises $= \frac{1}{2} r^2 \pi$,
2) das Dreieck $cde = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$ und
3) der Inhalt des Kreisausschnitts $cdfe \frac{r^2 \varphi \pi}{360}$; folglich muß
4) der Abschnitt $def = \frac{r^2 \varphi \pi}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \varphi$ seyn.

Nun ist

5) die halbe Halbkreisfläche $abed = def = \frac{r^2 \pi}{4}$

und es muß daher, weil der Halbkreis der Aufgabe zufolge halbirt werden soll

6) $\frac{r^2 \pi}{4} = \frac{r^2 \pi \varphi}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \varphi$ werden, wenn man nämlich 4 mit 6 verbindet; woraus

7) $\sin \varphi = \frac{\pi}{180} (\varphi - 90°)$ wird.

Um nun aus dieser Gleichung, in welcher der Bogen des Winkels und sein Sinus vorkommt, φ zu finden, muß man folgenden Weg einschlagen: man nehme, da φ auf jeden Fall größer als 90° seyn muß,

8) $\varphi = 90° + \psi$, wodurch
9) $\sin \varphi = \cos \psi$ ist.

Aus 8 erhält man

10) $\varphi - 90° = \psi$ und wenn 10 nach 7 kommt, so wird

11) $\sin \varphi = \frac{\pi \psi}{180}$. Aus 9 und 11 aber wird:

12) $\cos \psi = \frac{\psi \pi}{180}$.

Da nun offenbar

$$\psi < 90°$$

seyn muß, weil $\varphi < 180°$ ist, so versuche man damit, daß man z. B.:

13) $\psi = 45°$ in 12 setzt, wodurch

14) $\cos 45° = \frac{45 \cdot \pi}{180}$ oder

15) $\cos 45° = 0{,}785 \ldots$ wird.

Nun ist aber

16) cos 45° = 0,707 • • •
folglich müßte, wenn 16 mit 15 verbunden wird:
17) 0,707 • • = 0,785 • • •
seyn; was aber nicht der Fall ist, man ersieht vielmehr, daß ψ zu groß genommen wurde. Da indeß der Unterschied noch kein Zehntel beträgt, so kann ψ nicht viel kleiner als 45° seyn; man nehme daher
ψ = 40°, wodurch
18) cos 40° = $\frac{40 \cdot \pi}{180}$ oder
19) cos 40° = 0,698 • • • • wird.
Da nun
20) cos 40° = 0,766 • • •, so müßte, wenn 19 mit 20 verbunden wird:
21) 0,766 • • • = 0,698 • • • seyn.
Weil dies nun aber nicht der Fall ist und man überdies auch sieht, daß ψ zu klein angenommen wurde und der wahre Werth von ψ zwischen 40° und 45° liegen muß, so nehme man an
22) ψ = 41°; und man bekommt:
log cos 41° = 0,8777799 — 1
und log $\left(\frac{\varphi \pi}{180}\right)$ = 0,8546613 — 1
wo 23) der Fehler = 0,0231185 wird.
Setzt man aber z. B.
24) ψ = 43°, so ist
log cos 43° = 0,8641275 — 1 und
log $\left(\frac{\varphi \pi}{180}\right)$ = 0,8753459 — 1 folglich wird
25) der Fehler = — 0,0112184.
Die Differenz dieser Fehler aber ist:
26) 0,0231186
— 0,0112184
das ist = 0,0343370.
Nun setze man
27) 0,0343370 (Differenz der Fehler) : 0,0231186 (Fehler bei 41°) = 2° (Differenz von 43°—41°): 1° 20′ (Differenz zwischen 41° und dem zu suchenden Bogen), woraus
ψ = 41° + 1° 20′ = 42° 21′ wird.

Wendet man nun den so eben gefundenen Werth für ψ an, so wird

28) $\log \cos 42^\circ\ 20' = 0{,}8687851 - 1$ und

$$\log\left(\frac{\psi\pi}{180}\right) = \underline{0{,}8685589 - 1}$$

wobei der Fehler $= 0{,}0002253$ ist; und

wo man sieht, daß bis zur dritten Decimalstelle die Logarithmen schon übereinstimmen und daß demnach der Winkel ψ nur sehr wenig größer seyn muß.

Man setze daher

29) $\psi = 42^\circ\ 21'$ und es wird sodann

30) sog $\cos 42^\circ\ 21, = 0,\ 8686700 - 1$ und

$$\log\left(\frac{\psi\pi}{180}\right) = \underline{0{,}8687308 - 1;}$$ folglich ist

der Fehler $= -\ 0{,}0000608.$

Die Differenz der Fehler ist aber

$$\begin{array}{r} 2253 \\ -\ 608 \\ \hline 2861 \end{array}$$

Setzt man nun

31) 2861 (Differenz der Fehler) : 2253 (Fehler bei $42^\circ\ 21'$) $= 1'$ (Differenz aus $42^\circ\ 21' - 42^\circ\ 20'$) : $47''$ (Differenz zwischen $42^\circ\ 20'$ und dem zu suchenden Bogen), so wird

$$\psi = 42^\circ\ 20' + 47'' = 42^\circ\ 20'\ 47''.$$

Wollte man nun, da hier die Secunden schon richtig sind, noch weiter gehen, so müßte man Logarithmen mit mehr als sieben Dezimalstellen anwenden.

Euler fand

$\psi = 42^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$, wodurch, wenn man dieses Resultat nach 8 setzt;

$\psi = 90^\circ + 42^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$, das ist

$\varphi = 132^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$ wird.

Da man nun φ kennt, so hat man auch **acd** bald gefunden, weil

32) $2\mathbf{acd} = 180^\circ - \varphi$ ist und demnach $2\mathbf{acd} = 180^\circ - 132^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$ oder $\mathbf{acd} = 23^\circ\ 49'\ 36''\ 23'''$ wird.

§. 713.

Hätte man den Halbkreis etwa in drei gleiche Theile durch Sehnen, die mit dem Durchmesser parallel gehen,

theilen wollen, so müßte der Abschnitt **def** (Fig. 664.) ein Drittel der Halbkreisfläche seyn und man hätte daher:

$$\frac{r^2\pi}{6} = \frac{r^2\varphi\pi}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\varphi$$

zur fundamental Gleichung erhalten, woraus

$$\sin\varphi = \frac{\pi}{180}(\varphi - 60^\circ)$$ wird.

Nimmt man z. B. $\varphi = 113^\circ$, so erhält man

$$\sin 113^\circ = \frac{\pi}{180}(113^\circ - 60^\circ)$$ oder

da $\sin 113^\circ = \sin 67^\circ = 0{,}9205049\ldots$ ist, so muß

$0{,}9205049 = 0{,}92502\ldots$ seyn.

Dies ist indeß nicht der Fall, folglich kann auch nicht $\varphi = 113^\circ$ seyn: es wird dieser Winkel etwa $112^\circ\ 45'$ seyn; welcher Werth schon ziemlich richtig ist.

Fährt man nun hier so fort, wie §. 712 gelehrt wurde, so können noch die Sekunden, Terzen u. s. w. gefunden werden.

Um den Winkel **fcg** (Fig. 665.) zu erhalten, darf man nur **cfehdg** $= \frac{2}{3}$ **afehdgb** machen und ganz so, wie bei Bestimmung des Winkels **ecd** verfahren.

Anhang.

§. 714.

Aufgabe.

Eine Kreisfläche, deren Durchmesser **d** (Taf. 6. Fig. 666.) gegeben ist, in eine Ellipsenfläche zu verwandeln, deren eine Achse **a** man kennt.

Auflösung. (S. §. 549.).

Man mache **ab** = **a**, errichte in **b** auf **ab** das Loth **bd** = **d**, ziehe **ad** und lege **cd** so an die **ad**, daß **adc** ein rechter Winkel wird: es ist sodann **bc** die andere Achse.

Beweis.

Es ist 1) **ab** : **bd** = **bd** : **bc** oder

2) **a** : **d** = **d** : **bc**; woraus

3) $bc = \frac{d^2}{a}$ wird.

Da nun der Durchmesser desjenigen Kreises, dessen Fläche einer Ellipsenfläche gleich ist, die mittlere Proportion einer zwischen den Achsen der Ellipse ist, so muß:

4) **a** : **d** = **d** : **x** dem Durchmesser des der Ellipsenfläche gleichen Kreises seyn; woraus

5) $x = \frac{d^2}{a}$ hervorgeht. Da nun der Werth in 5 dem in 3 vollkommen gleich ist, so ist bewiesen, w. z. b. w.

§. 715.

Aufgabe.

Die Aufgabe des §. 289. auf andere Art zu lösen.

Auflösung.

Man nehme die Breite **m** (Taf. 6. Fig. 667.) in den Zirkel und beschreibe damit sowohl aus **a** als auch

aus b Kreise. Wird nun von a die Tangente ad an den Kreis um d und von b die Tangente bc an den Kreis um a gelegt, so ist die Konstruction beendet.

§. 716.

Aufgabe.

Der Primeter p (Taf. 6. Fig. 668.) eines Dreiecks und zwei, folglich alle Winkel eines Dreiecks sind gegeben, man soll das Dreieck konstruiren.

Auflösung.

Man nehme eine beliebig große Linie ac, welche jedoch kürzer als der gegebene Perimeter p seyn muß, setze an dieselbe an a den Winkel α und an c den Winkel β, wodurch das Dreieck abc erhalten wird. Nun verlängere man ac, bis ae = ab und cd = bc wird, lege p unter einem beliebigen Winkel def an e; d. h. man mache ef = p, ziehe df und mache ch und ag parallel mit df. Die hierdurch auf ef abgeschnittenen Theile eg, gh und fh sind die Seiten des verlangten Dreiecks.

§. 717.

Aufgabe.

Eine gegebene Linie m (Taf. 6 Fig. 669.) dergestalt nach hi in ein Rechteck abcd zu legen, daß die Segmente ai und ah sich verhalten, wie ab und ag.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonale bg, halbire sie in e und mache ef = eg = $\frac{1}{2}$ m. Zieht man nun ae und macht man hf wie auch gi # ae, so ist, wenn h und i durch eine gerade Linie hi verbunden werden, diese nicht nur so groß wie m, sondern es steht auch ai : ah = ab : ag.

§. 718.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Abscisse ce (Fig. 691.) und Ordinate bc einer Parabel deren Parameter zu finden.

Auflösung.

Am Endpunkte c der Ordinate bc erichte man auf denselben ein Loth ce = der gegebenen Abscisse, trage ce von e nach a und ziehe ab. Wird nun die bd in b auf ab normal gemacht, so erhält man die cd, welches die Hälfte des zu bestimmenden Parameters ist. Der Parameter ist nämlich = 2 cd.

§. 719.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Parameter einer Parabel diese zu beschreiben.

Auflösung. (S. §. 160. Fig. 173.).

Wenn die Lage des Brennpunktes und des Scheitels gegeben ist, so ziehe man durch diese Punkte eine gerade Linie ab (Fig. 670.) und durch den Scheitel c lege man die ef normal auf ab. Nun ziehe man vom Fokus d an die ef beliebige Linien dn, dg, dh, di ꝛc. (je mehrere desto besser) und errichte auf diesen Linien, in denjenigen Punkten, wo sie die ef treffen die Lothe no, gk, hl, im ꝛc., man erhält hier noch Tangenten der Parabel, wodurch, wenn man sehr viele Tangenten annimmt, die Parabel genau gebildet werden kann, wie die Figur zeigt.

§. 720.

Aufgabe.

Aus dem Scheitel c (Fig. 671.) und Brennpunkte e einer Parabel deren Parameter zu finden.

Auflösung.

Durch die gegebenen Punkte c und e, lege man die gerade Linie gh, nehme in der Parabel einen beliebigen Punkt a an und fälle von demselben auf die gh das Loth ab. Nun mache man cd = bc; ziehe ad mache af auf ad lothrecht in a und nehme bf zweimal: es ist diese Länge (nämlich 2bf) der verlangte Parameter der Parabel.

§. 721.

Aufgabe.

Zu einer gegebenen Parabel die Lage des Durchmessers derselben zu finden.

Auflösung.

Man ziehe durch zwei beliebige Punkte **a** und **b** (Fig. 672.) der Parabel die gerade Linie **ab** und nehme von **a** einen beliebigen Punkt **c** in der Parabel an, durch welchen man die **cd** mit **ab** parallel zieht. Wird nun **ab** in **e** und **cd** in **f** halbirt, so ist die durch diese Halbirungspunkte gehende gerade Linie **gh** ein Durchmesser der Parabel.

§. 722.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt **i** (Fig. 672.) der Parabel einen Durchmesser derselben zu legen.

Auflösung.

Man konstruire wie in der vorigen Auflösung (§. 721.) und bestimme **gh**. Wird nun durch den gegebenen Punkt **i** eine Parallele mit **gh** gelegt, so ist diese der verlangte Durchmesser.

§. 723.

Aufgabe.

In jeder Parabel die Achse und folglich auch den Scheitelpunkt der Parabel zu bestimmen.

Auflösung.

Nach §. 721. bestimme man einen Durchmesser **ab** (Fig. 673.) der Parabel, errichte auf derselben in einem Punkte **c** ein Loth **de** (wodurch man eine Doppelordinate bekommt), halbire es in **f** und errichte von diesem Halbirungspunkte auf **de** ein Loth **fg**, bis davon die Parabel in **g** getroffen wird: **fg** ist sodann die gesuchte Achse, **g** ist der Scheitelpunkt der Parabel.

§. 724.

Aufgabe.

Zu jeder Parabel deren Parameter zu finden.

Auflösung.

Nach der Aufgabe des §. 5. bestimme man die Achse **bg** (Fig. 674.), nehme in der Parabel einen beliebigen

Punkt c an, fälle von demselben auf die Achse das Loth cd, ziehe ac und mache ce lothrecht auf die ac in c, wodurch auf der Achse ab das Segment de erhalten wird, welches der zu bestimmende Parameter ist.

§. 725.

Aufgabe.

Zu jeder Parabel deren Brennpunkt zu finden.

Auflösung.

Nach §. 724. bestimme man den Parameter de (Fig. 674.), theile denselben in vier gleiche Theile und trage einen solchen Theil von dem Scheitel a in die ab nach f: es ist sodann f der verlangte Brennpunkt der Parabel.

§. 726.

Aufgabe.

Die Richtlinie (Direktrix) der Parabel zu finden.

Auflösung.

Nach §. 725. bestimme man den Brennpunkt f (Fig. 674.) der Parabel und trage die Entfernung af von a nach g in die Verlängerung der Achse ab. Wird nun durch g die hi rechtwinklig mit bg gemacht, so ist hi die zu bestimmende Richtlinie.

§. 727.

Aufgabe.

Es ist der Winkel ibk = m (Fig. 675.), welchen eine Tangente bi, mit der durch ihren Berührungspunkt b gehenden und gegebenen Doppelordinate bk macht, gegeben, man soll die hierzu gehörende Parabel beschreiben.

Auflösung.

An die gegebene Doppelordinate bk trage man den gegebenen Winkel, so daß ibk = m wird. Nun halbire man bk in c, lege durch c die ai lothrecht auf bk und mache ba in b senkrecht auf bi. Hierdurch ist ac der halbe Parameter, ae die Achse und, wenn ci in e halbirt wird, e der Scheitel der Parabel. Wird endlich $ef = he = \frac{1}{2} ac$ gemacht,

so ist f der Brennpunkt und die durch h gehende Normale auf a i, nämlich d g, ist die Richtlinie, wodurch mit Benutzung aller übrigen zur Konstruction der Parabel gehörenden Theile derselben diese Kurve noch nach den vorstehenden Aufgaben leicht zu konstruiren ist.

§. 728.

Aufgabe.

Von einem in der Parabel liegenden Punkt a (Figur 676.) eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Erste Auflösung.

An die Richtlinie b c (die, wenn sie nicht gegeben ist, nach den vorhergehenden Aufgaben leicht gefunden werden kann) fälle man von dem gegebenen Punkt a in der Parabel das Loth a d, ziehe von d nach dem Brennpunkte f die gerade Linie d f und halbire sie in e. Wird nun durch a und e die e g gezogen, so ist sie die verlangte Tangente der Parabel.

Andere Auflösung.

Man ziehe den Radius Vector a f, fälle von a auf b c das Loth a d, halbire den Winkel d a f durch die g e und es ist diese Halbirungslinie die gesuchte Tangente zu dem gegebenen Punkt a.

Dritte Auflösung.

Man mache a d normal auf b c, ziehe d f und lege die g e durch a lothrecht auf d f: sie ist die verlangte Tangente.

§. 729.

Aufgabe.

Von einem außerhalb der Parabel liegenden Punkt a (Fig. 677.) Tangenten an dieselbe zu legen.

Erste Auflösung.

Man verbinde den gegebenen Punkt a mit dem Brennpunkte f durch die gerade Linie a f, beschreibe aus a mit a f einen Kreis, wodurch die Richtlinie in den Punkten h und i geschnitten wird. In diesen Durchschnitts-

punkten (h und i) errichte man auf h i die Lothe h g und i k, verlängere sie so weit, bis sie die Parabel in g und k treffen und verbinde sowohl g, als auch k mit dem Punkt a durch die a g und a k, welches die zu bestimmenden Tangenten sind.

Zweite Auflösung.

Den gegebenen Punkt a (Fig. 678.) verbinde man mit dem Brennpunkte f der Parabel durch die gerade Linie a f und beschreibe damit aus a einen Kreis, wodurch die Richtlinie in b und c geschnitten wird. Diese Durchschnittspunkte verbinde man durch die geraden Linien b f und c f mit f, halbire die b f in e und die c f in d und lege durch a und e, so wie durch a und d die geraden Linien a g und a h, so sind dieses die zu findenden Tangenten.

§. 730.

Aufgabe.

An die Parabel eine Tangente g h (Fig. 679.) zu legen, welche parallel mit einer gegebenen Linie a b geht.

Auflösung.

Aus dem Brennpunkte f fälle man auf die ihrer Lage nach gegebene Linie a b das Loth c f und verlängere dasselbe, wenn es nöthig seyn sollte, so weit, daß dadurch die Richtlinie i k in d geschnitten wird. Das Segment d f halbire man in e und lege durch diesen Halbirungspunkt eine mit a b parallel gehende gerade Linie g h, welches die verlangte Tangente seyn wird.

§. 731.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punkt a (Fig. 680.) in der Ellipse eine Tangente zu legen.

Erste Auflösung.

Von a ziehe man die Leitstrahlen a f und a g, verlängere den einen derselben, etwa a g bis b und mache a c = a d beliebig groß, jedoch kürzer, als a f. Zieht man nun c d und beschreibt man damit aus c und d die Bogen c e und d e, so schneiden sich diese in e und es

ist die durch a und e gelegte gerade Linie h i die zu finde Tangente.

Andere Auflösung.

Aus einem Brennpunkte, etwa aus f (Fig. 681.), ziehe man durch den gegebenen Punkt a eine gerade Linie b f = c d, verbinde b mit dem andern Brennpunkte g durch die b g und halbire sie in e. Wird nun durch a und e eine gerade Linie h i gelegt, so ist diese die gesuchte Tangente.

§. 732.

Aufgabe.

Von einem außerhalb der Ellipse liegenden Punkte a (Fig. 682.) eine Tangente an diese Kurve zu legen.

Erste Auflösung.

Man verbinde den gegebenen Punkt a mit dem ihm zunächst liegenden Brennpunkte f durch die gerade Linie a f und beschreibe mit dieser Weite aus a einen Kreis. Hierauf nehme man die große Achse i k in den Zirkel und beschreibe damit aus g einen Kreisbogen, wodurch der Kreis um a in b geschnitten wird. Zieht man nun b f und halbirt man diese Linie in c, so ist die durch a und c gelegte gerade Linie d e die verlangte Tangente.

Andere Auflösung.

Sobald der Punkt b nach der ersten Auflösung gefunden ist, so ziehe man die b g, welche die Ellipse in h schneiden wird. Legt man nun durch diesen Punkt h und durch a die gerade Linie d a, so ist solche die zu bestimmende Tangente.

Dritte Auflösung.

Nachdem wie zuvor b bestimmt ist, ziehe man a b. Hierdurch entsteht nun ein Winkel b a f, dessen Halbirungslinie d a die gesuchte Tangente ist.

§. 733.

Aufgabe.

Es ist eine Ellipse und eine ihrer Lage nach bekannte gerade Linie c d (Fig. 683.) gegeben;

man soll eine mit dieser Linie parallel gehende Tangente an die Kurve legen.

Erste Auflösung.

Von demjenigen Brennpunkte f, welcher der gegebenen Linie cd am nächsten liegt, fälle man auf cd ein Loth ef; nehme die große Achse ab in den Zirkel und beschreibe damit aus g einen Bogen, wodurch die ef (oder deren Verlängerung) in h geschnitten wird. Zieht man hierauf gh, so wird dadurch die Ellipse in dem Punkte i geschnitten, durch welchen eine Parallele mit cd gelegt wird, welches die verlangte Tangente ist.

Andere Auflösung.

Man fälle von f auf die gegebene cd ein Loth ef, mache gh = ab, halbire fh in m und lege durch diesen Halbirungspunkt die kl # cd: sie ist die zu bestimmende Tangente der Ellipse.

§. 734.

Aufgabe.

Es ist eine ihrer Lage nach bekannte gerade Linie ab (Fig. 684.) gegeben; man soll eine Normale in die Ellipse ziehen, welche mit der gegebenen Linie ab parallel geht.

Auflösung.

Durch den der gegebenen Linie ab zunächst liegenden Brennpunkt g ziehe man eine gerade Linie de # ab und mache cf = kl. Legt man nun durch h die hi # ab, so ist hi die zu konstruirende Normale.

§. 735.

Aufgabe.

An zwei entgegengesetzte Hyperbeln die Asymptoten zu ziehen, wenn deren Achsen bekannt sind.

Auflösung.

Durch b (Fig. 685.) lege man fg # de, mache bf = bg = dc = $\frac{1}{2}$ de und lege durch f und c, ferner durch g und c die geraden Linien fh und gi: es sind dies die Asympteten der Hyperbeln.

§. 736.

Aufgabe.

Die Hyperbel aus der gegebenen ersten Achse 1k (Figur 686.) und aus der Lage der Brennpunkte a und b zu konstruiren.

Auflösung.

Um einen der Brennpunkte, etwa um a, beschreibe man mit der ersten Achse 1k einen Kreis; das heißt man mache den Halbmesser ac = 1k und ziehe von dem Mittelpunkte a eine beliebige Anzahl Sekanten von unbestimmter Länge. Von dem andern Brennpunkte b ziehe man an die Durchschnittspunkte d, e ꝛc. des Kreises und der Sekanten die geraden Linien bd, be ꝛc. und halbire sie in den Punkten f, g ꝛc. Errichtet man nun in diesen Halbirungspunkten auf den Verbindungslinien bd und bf Normalen, so werden diese die korrespondirenden Sekanten in h und i ꝛc. schneiden und eine diese Schnittpunkte verbindende krumme Linie ist sodann die Hyperbel.

§. 737.

Aufgabe.

An einen in der Hyperbel gegebenen Punkt a (Figur 687.) eine Tangente an dieselbe zu legen.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkte a ziehe man nach den Brennpunkten f und g gerade Linien af und ag, mache ah = af, ziehe fh, beschreibe aus f und h mit fh zwei sich in l schneidende Kreisbogen und lege durch den gegebenen Punkt und durch den Durchschnittspunkt l eine gerade Linie ik: es ist diese die verlangte Tangente.

Man sieht hier bald, daß die Halbirungslinie ik des Winkels fag die gesuchte Berührungslinie ist.

§. 738.

Aufgabe.

Von einem außerhalb der Hyperbel liegenden Punkt a (Fig. 688.) eine Tangente an diese Kurve zu legen.

Auflösung.

Man ziehe **a g**, das heißt man verbinde den gegebenen Punkt **a** mit dem ihm zunächst liegenden Brennpunkte **g** durch eine gerade Linie; nehme **i k** in den Zirkel und beschreibe damit aus **f** einen Bogen, welcher den aus **a** mit **a g** zuvor beschriebenen Bogen in **b** und **c** schneidet. Hierauf verbinde man die Punkte **b** und **g** durch eine gerade Linie **b g** und fälle auf sie das Loth **a d**, welches bei genugsamer Verlängerung die erste Tangente **a e** ist. Wird endlich noch **c** und **g** durch eine gerade Linie **c g** verbunden, auf diese aber aus **a** ein Loth **a h** gefällt, so ist solches die andere aus **a** gehende Berührungslinie der Hyperbel.

§. 739.

Aufgabe.

An eine Hyperbel eine Tangente zu legen, welche mit einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie **a b** (Fig. 689.) parallel geht.

Auflösung.

Auf die gegebene Linie **a b** fälle man von dem Brennpunkte **f** (welcher der **a b** am nächsten liegt) ein Loth **c m**, nehme **d e** in den Zirkel und beschreibe damit aus dem andern Brennpunkte **g** einen Bogen, welcher die **c m** in **h** schneidet. Halbirt man nun die **f h** in **i** und legt man durch **i** eine gerade Linie **k l** # **a b**, so ist **k l** die zu findende Tangente.

§. 740.

Aufgabe.

Es sind die Asymptoten und ein Punkt **a** (Fig. 690.) in der Hyperbel gegeben; man soll an diesen Punkt eine Tangente dieser Kurve legen.

Auflösung.

Von dem gegebenen Punkt **a** ziehe man mit der ihm anliegenden Asymptete **k g** eine Parallele **a d** und verlängere dieselbe so weit, bis dadurch die Asymptete **b c** in **d** berührt wird. Macht man nun **d f = d e** und legt

man durch a und f die gerade Linie h i, so ist diese die durch a gehende Tangente der Hyperbel.

§. 741.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt f (Fig. 690.) in einer der Asymptoten gegeben; man soll von demselben eine Tangente an die Hyperbel legen.

Auflösung.

Die Entfernung des gegebenen Punkts f von dem Mittelpunkt e in der Asymptete b c halbire man in d und ziehe durch diesen Halbirungspunkt mit der Asymptete g k eine Parallele a d, wodurch man den Punkt a in der Hyperbel bestimmt. Wird nun durch a und durch den gegebenen Punkt f eine gerade Linie h i gezogen, so ist diese die gesuchte Tangente.

§. 742.

Aufgabe.

Aus der gegebenen ersten Achse a b (Figur 692.) und dem Abstand a f des Brennpunkts f vom Scheitel a der Hyperbel eine Linie zu finden, welche der zweiten Achse gleich ist.

Auflösung.

In dem Scheitel a errichte man auf a b ein Loth h i, halbire die erste Achse a b in c, nehme c f in den Zirkel und beschreibe damit aus c einen Bogen e f g, wodurch die h i in e und g geschnitten und g e = der zweiten Achse bestimmt ist.

§. 743.

Aufgabe.

Aus den beiden Achsen einer Hyperbel die Brennpunkte zu finden.

Auflösung.

Die beiden Achsen a b und d e (Fig. 693.) setze man in ihren Mittelpunkten rechtwinklig zusammen, verbinde den Endpunkt a mit dem Endpunkte d durch die a d und trage a d von c nach f, wie auch nach g in

die Verlängerung der a b, so sind f und g die gesuchten Brennpunkte.

§. 744.

Weil bei der gleichseitigen Hyperbel der Parameter der Achse gleich ist, so bedarf es zu dessen Auffindung keiner besondern Konstruction, wenn die Achsen bekannt sind.

§. 745.

Eben so ist die Subnormale der Abscisse gleich, wenn die Hyperbel gleichseitig ist.

§. 746.

Aufgabe.

Es ist der Winkel b a e (Fig. 694.), welchen die Asymptoten einer Hyperbel machen und ein zwischen dessen Schenkeln a b und a c liegender Punkte d gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Hyperbel legen.

Auflösung.

Man ziehe durch d zwei gerade Linien b e und i h und mache

b f = d e und
i g = d h:

es sind dann f und g Punkte in der Hyperbel.

Hätte man nun auf ähnliche Art mehrere gerade Linien durch d gelegt und wie zuvor beschrieben wurde, operirt, so würde man mehrere Punkte gefunden haben, deren Verbindung durch eine Krümme eine Hyperbel erzeugt.

§. 747.

Aufgabe.

Zu einer gegebenen Hyperbel deren Mittelpunkt g (Fig. 695.) zu finden.

Auflösung.

In der Hyperbel a h b nehme man einen Punkt a und lege von demselben eine beliebige Linie a b in und an die Hyperbel. In der entgegengesetzten Hyperbel c i d lege man an einen beliebigen Punkt c die c d # a b

und halbire **a b** in **f**, **c d** in **e**. Wird nun **e** und **f** durch die gerade Linie **e f** in **g** halbirt, so ist **g** der gesuchte Mittelpunkt der Hyperbel.

§. 748.

Aufgabe.

Zu einer Hyperbel die erste Achse zu finden.

Auflösung.

Nach dem vorigen §. bestimme man den Mittelpunkt **a** (Fig. 696.) der Hyperbel, nehme eine beliebige Weite **a c** in den Zirkel und beschreibe damit aus **a** einen Kreis, welcher die Hyperbel in **b**, **c**, **d** und **e** schneidet. Verbindet man nun **b** mit **c**, **e** mit **d** und halbirt man **b c** in **g**, **d e** in **f**, so ist, wenn man **f g** zieht, das Segment **h i** der **f g** die erste Achse.

§. 749.

Aufgabe.

Auf der Achse **a b** (Fig. 697.) eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Man verlängere die Achse **a b** auf einer Seite unbestimmt, ziehe durch die Verlängerung eine willkürliche Anzahl rechtwinkliger Linien, mache

$$e\,h = a\,e,$$
$$d\,g = a\,d,$$
$$c\,f = a\,c \text{ ꝛc.}$$

Nun beschreibe man über den Durchmessern **b f**, **b g**, **b h** ꝛc. Kreise, welche die auf **b h** stehenden Lothe in den Punkten **h**, **i**, **k** ꝛc. schneiden und wodurch, wenn diese Punkte durch eine krumme Linie verbunden werden, die Hyperbel beschrieben ist.

§. 750.

Wenn **a b** (Fig. 698.) die erste Achse und **c d** deren Doppelordinate, **b e** aber die ihr zugehörende Abscisse ist, so findet man

$$\text{die zweite Achse} = \sqrt{\frac{d\,e^2 \times a\,b^2}{a\,e \times b\,e}}.$$

§. 751.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel acb (Fig. 699.) zu verdreifachen.

Auflösung.

Man nehme auf einen Schenkel bc einen Punkt f beliebig an und beschreibe aus demselben mit fc einen Bogen, welcher den Schenkel ac in d schneidet. Nun ziehe man df und beschreibe mit dieser Linie aus d einen Bogen ef, welcher den Punkt e auf dem Schenkel bc angibt. Wird nun von d nach e die gerade Linie de gezogen, so ist ade = 3 acb = 3 α.

§. 752.

Aufgabe.

Einen Winkel acb (Fig. 700.) in drei gleiche Theile zu theilen.

Die Auflösung

dieser Aufgabe ist dann möglich, wenn man auf dem Schenkel ac des gegebenen Winkels einen Punkt f finden kann, der so liegt, daß wenn man aus dem Punkt e, welcher durch die Rückwärtsverlängerung des Schenkels bc bis an die Peripherie erhalten wird, durch f eine gerade Linie de an die Peripherie zieht, die df = cf wird.

Mit Zirkel und Lineal, nämlich durch Hilfe der Elementargeometrie kann dieser Punkt f jedoch nicht bestimmt werden.

§. 753.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt c (Fig. 701.) eine Linie zu legen, welche mit der Linie ab parallel ist.

Auflösung.

Auf ab nehme man zwei Punkte d und e beliebig an, ziehe ce, halbire sie in f, lege durch d und f eine

gerade Linie und beschreibe aus f mit df einen Bogen, welcher die Verlängerung der df in g schneidet. Wird nun durch c und g eine gerade Linie gelegt, so ist diese parallel mit ab (Vergl. §. 24.).

§. 754.

Aufgabe.

Einen rechten Winkel acb (Fig. 702.) in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Mit beliebiger Weite ac beschreibe man aus dem Scheitel c einen Kreisbogen aeb, halbire bc in d, setze die halbe Sehne de lothrecht auf bc in deren Halbirungspunkt d und ziehe ce: es ist sodann

$$ace = \frac{1}{3}\, acb = \frac{1}{3}\, R.$$ (Vergl. §. 17.).

§. 755.

Aufgabe.

Jeden geradlinigen Winkel acb (Fig. 703.) zu halbiren.

Auflösung.

Man verlängere den einen Schenkel bc bis an die Peripherie, welche aus c mit willkürlichem Halbmesser beschrieben wurde und ziehe ad. Macht man nun ce # ad, so ist $ace = \frac{1}{2}\, acb$. (Vergl. §. 10.).

§. 756.

Aufgabe.

Jede Kreisfläche in drei gleiche Theile A, C und B (Fig. 704.) zu theilen, so daß zwei Theile congruent sind und die Summe der Theilungslinien der Peripherie der gegebenen Kreisfläche gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser ab des Kreises und theile ihn bei c und d in drei gleiche Theile. Beschreibt man nun über $\frac{1}{3}$ ab, nämlich über ad und bc zwei

Halbkreise und ebenso über $\frac{2}{3}$ ab, nämlich über ac und bd, wie die Figur zeigt, so ist A ≅ B und A = C = B. Ferner ist die Summe der vier beschriebenen Halbkreise so groß wie die Peripherie der gegebenen Kreisfläche *).

§. 757.

Aufgabe.

An einem kreisrunden Thurm ist außerhalb ein Punkt a (Fig. 705.) gegeben, man soll an denselben eine Tangente legen.

Auflösung.

Man trage von a nach b und nach c eine beliebige Weite, deren Größe sich nach der Größe des Thurms richtet, die jedoch so gewählt werden muß, daß ba + ac nicht so groß wie der Halbkreis wird. Hierauf nehme man wieder einen beliebigen Punkt d außerhalb der Peripherie des Thurms an, messe bd und ad, mache

ce = bd und

ae = ad.

Bringt man nun f in den Halbirungspunkt der de und macht man gh lothrecht auf af, so ist gh die verlangte Tangente.

„Diese Aufgabe dient dazu, verschiedene gegebene „Figuren um kreisrunde Gebäude abstecken zu „können."

§. 758.

Aufgabe.

An einen elliptischen Thurm eine Tangente an einen gegebenen Punkt zu legen.

Auflösung.

Man messe die große und kleine Achse der Ellipse und beschreibe sie hierzu auf dem Papier, ziehe von den zuvor bestimmten Brennpunkten **) a und b (Fig. 706.)

---

*) Die Beweise zu §. 751, 752, 753, 754, 755 und 756 findet man in meinen „Neue Novitäten aus der Elementargeometrie. Breslau 1836, bei Eduard Pelz."

**) §. 149. und „Höhenzimmerkunst" von J. C. G. Hampel §. 195.

durch den Berührungspunkt c gerade Linien af und be, mache ce = cf beliebig groß und nehme in der Ellipse die Punkte d und g beliebig an. Trägt man nun die Weiten cd und cg an den Thurm und legt man die Dreiecke cde und cfg in den Grund, so ist, wenn man ef in h halbirt und ik lothrecht an ch legt, die ik die verlangte Tangente an dem elliptischen Thurme.

§. 759.

Aufgabe.

Es ist die Kathete ab (Fig. 707.) eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, man soll dazu die andere Kathete be so bestimmen, daß sie die Hälfte der Hypothenuse ae ist.

Auflösung.

Man verlängere die ab, bis bc = ab wird und beschreibe über ac einen Halkreis adc, und aus c beschreibe man mit bc den Bogen bd. Zieht man nun ad und errichtet man in b auf ac das Loth be, so ist be = $\frac{1}{2}$ ae.

§. 760.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie m (Fig. 708.) dergestalt in ein Rechteck abcd zu legen, daß die Segmente ak und al der Seiten ab und ad ein bestimmtes Verhältniß, etwa wie 2 : 3 haben.

Auflösung.

Man trage eine beliebige Weite zweimal von a nach e und dreimal von a nach f, ziehe ef, halbire sie in g, ziehe ag und lege durch a eine Parallele mit ef. Wird nun die m halbirt, ai = ah = $\frac{m}{2}$ gemacht, il und hk # ag gezogen und l mit k durch eine gerade Linie verbunden, so ist lk = m und ak : al = 2 : 3.

§. 761.

Aufgabe.

Es ist die Hypothenuse ab (Fig. 709.) eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, man soll dazu die andere Kathete dergestalt finden, daß sie zur Hypothenuse ein bestimmtes Verhältniß, etwa wie 2 : 3 habe.

Auflösung.

Man errichte in b auf ab einen Perpendikel und trage auf denselben zwei gleiche, beliebig große Theile von b bis d, nehme drei gleiche Theile in den Zirkel und beschreibe damit aus d einen Bogen, welcher die Kathete ab in e schneiden wird. Zieht man nun de und macht man ac # de, so ist

bc : ac = 2 : 3

§. 762.

Aufgabe.

Es ist aus dem Halbirungspunkt e (Fig. 710.) der Diagonale bd eines Quadrats abcd mit der halben Diagonale ae ein Bogen ab beschrieben. Man soll mit einem andern Halbmesser einen Bogen beschreiben, welcher dem Bogen ab gleich ist.

Auflösung.

Man verlängere ad und beschreibe aus d mit bd einen Bogen bf: es ist dies der verlangte.

§. 763.

Aufgabe.

Es sollen in den Quadrant abc (Fig. 711.) zwei Kreisbogen beschrieben werden, welche dem Bogen acg gleich sind.

Auflösung.

Man ziehe ac, halbire ab in d und bc in e, und beschreibe mit ad aus d und e die Bogen af und fc, ihre Summe ist dem Bogen ac gleich.

§. 764.

Aufgabe.

Die Ecken eines Quadrats sollen dergestalt gebrochen werden, daß die gebrochene Ecke halb so lang als die stehen gebliebene Seite wird.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte des Quadrats einen Kreis in dasselbe, ziehe die Diagonale **ae** (Fig. 712.) und beschreibe aus **a** mit **af** einen Kreis, wodurch die Seiten des Quadrats in **b** und **d** geschnitten werden. Zieht man nun die **bd**, so ist, wenn **cg = ab** gemacht wird, **ab = ½ bc.**

§. 765.

Aufgabe.

Die Peripherie des Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser **ab** (Fig. 713.), theile ihn in vier gleiche Theile und errichte im ersten und dritten Theilpunkte Lothe **ce** und **df** auf **ab**, bis an die Peripherie, wodurch die Punkte **e**, **f**, **g** und **h** erhalten werden, welche die Peripherie in sechs gleiche Theile theilen.

§. 766.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen zu gegebener Höhe **ax** (Fig. 714.) und Steigungslinien **ab** aus drei Mittelpunkten zu konstruiren.

Auflösung.

Auf **ax**, als der gegebenen Höhe, bringe man die Grundlinie **ac** normal, d. i. horizontal, ziehe **xy # ab** und durch **b** lege man **cy # ax.**

Nun trage man a x von x nach g, mache g h lothrecht auf x y, wähle zwischen d und i einen beliebigen Punkt e und beschreibe daraus mit e g einen Kreis, welcher die c y in k und deren Verlängerung in l schneidet. Durch b lege man die Sehne m n # a c, mache darauf b o = b n, nehme die Differenz zwischen dem Durchmesser g h und dem Sehnenstücke m o von b nach p, so wie b k von b nach q und ziehe die p q. Endlich lege man durch l die l r # p q, mache b f = b r und es sind sodann d, f und e die Mittelpunkte für die Bogen a g, b s und s g.

§. 767.

Aufgabe.

Mittelst der Schnur und zweier Nägel einen steigenden Bogen zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Wenn a c (Fig. 715.) die gegebene Steigungslinie, d deren Mittelpunkt und e der Scheitel ist, so mache man a x und b y lothrecht auf a b und x y # a c. Ferner mache man e f normal auf x y und = e y, ziehe d g # e f, nehme auf d e einen beliebigen Punkt l, lege durch l eine Parallele mit a b, halbire k l in m, ziehe m d und beschreibe aus m mit m d den Halbkreis h d i. Durch h d und d i lege man zwei gerade Linien, in welche die Achsen der Ellipse fallen, von welcher der steigende Bogen ein Theil ist, mache f o # d n und f n # h s. Nimmt man nun die Entfernung e o und trägt man sie von d nach p und von d nach q, so ist p q die große Achse, und trägt man die Weite e n von d nach r und nach s, so ist r s die kleine Achse. Werden nun zu diesen Achsen die Punkte, in welche die Nägel für die Schnur zur Beschreibung der Ellipse kommen, bestimmt, so kann der steigende Bogen konstruirt werden.

Zweite Auflösung.

d (Fig. 716.) ist der Mittelpunkt der Steigungslinie a c, e der Scheitel (wo nämlich der steigende Bogen die

Treppenwange berührt), und ab ist die Horizontale. Man mache zuvörderst ax und by lothrecht auf ab und xy # ac, fälle von e auf ac das Loth ef, verlängere dasselbe, trage ad = cd = $\frac{1}{2}$ ac von e nach g und ziehe dg. Nun halbire man dg in h, lege durch h eine Parallele mit ab und beschreibe aus h mit dh den Bogen di. Durch d und i lege man eine gerade Linie, und durch d lege man einen Perpendikel auf die durch di gezogene Linie: jene ist die Richtung der großen, diese ist die Richtung der kleinen Achse. Endlich mache man hk = he, trage dk von d nach l und nach m, ferner bringe man ei von d nach n und nach o, wodurch lm die große und no die kleine Achse erhalten ist, zu welchen man auf die bekannte Art die Orte für die Nägel bestimmt.

§. 768.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen aus vier Mittelpunkten zu beschreiben, wenn bc (Fig. 717.) = $\frac{1}{2}$ ac ist.

Auflösung.

Man setze $\frac{1}{4}$ bc von c nach e, mache de # bc und bd # ac, beschreibe über de einen Halbkreis, theile ihn bei f und g in drei gleiche Theile und lege durch e und f, durch f und g und durch d und g gerade Linien von unbestimmter Länge.

Beschreibt man nun

aus d mit bd den Bogen bk,
aus g — gk — — ik,
aus f — fi — — hli und
aus e — eh — — ah,

so ist ahlikb der verlangte steigende Bogen, und wenn man an denselben eine Tangente xy legt, so geht diese # mit ab.

§. 769.

Aufgabe.

Einen steigenden Bogen zu konstruiren, bei welchem die Länge der Steigungslinie xy (Fig. 718.) noch einmal so groß ist, als die Höhe ax.

Auflösung.

Man mache xy # ac und fälle, wenn xy = 2 ax gemacht ist, von y auf ab ein Loth yb, halbire xy in d und mache de normal auf xy, cf aber # ab. Beschreibt man nun aus f mit cf den Bogen cd und aus e mit ae den Bogen ad, so ist adc der verlangte steigende Bogen.

§. 770.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen von gegebener Breite ab (Fig. 719.) und gegebener Höhe cd zu konstruiren.

Erste Auflösung.

Man halbire die Breite ab in c, errichte auf denselben in dem Punkte c eine Normale = der gegebenen Höhe cd, mache ce = cd, theile ae in fünf gleiche Theile, nehme deren sieben und trage sie von c nach f und nach h, wie auch von h nach i, mache $fg = \frac{1}{3} cf$, ziehe hl und im, wodurch man den Punkt k erhält.

Beschreibt man nun
aus f mit af den Bogen al,
aus k mit kl — — lm und
aus i mitim — — md,

so ist, wenn über be eben so verfahren wird, der gedrückte Bogen bestimmt.

Andere Auflösung.

Man nehme n und o willkürlich, doch so, daß n zwischen hi und o nicht zu fern von der Mitte der bc

zu liegen kommt. Nun bestimme man zwischen dn und bo die mittlere geometrische Proportionale, indem man über dn einen Halbkreis beschreibt und dp = bo macht, pq # ab zieht und d mit q verbindet. Wird nun dq von d nach r, dann von b nach s getragen, aus n mit nr der Bogen rt, und aus o mit os der Bogen st beschrieben, so erhält man den Durchschnittspunkt t durch welchen von n und o gerade Linien gelegt werden, welche dazu dienen, die Bogen dw, wv und bv, welche aus n, t und o beschrieben sind, zu begrenzen.

§. 771.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen nach gegebener Breite und Höhe aus drei Mittelpunkten, doch so zu konstruiren, daß jeder hierzu angewendete Kreisbogen 60° hält.

Auflösung.

Wenn ac (Fig. 720.) die halbe Breite, bc aber die gegebene Höhe ist, so beschreibe man über ac ein gleichseitiges Dreieck acd, mache ce = bc, lege durch b und e die bf und mache fh # cd. Beschreibt man nun aus g mit ag den Bogen af und aus h mit fh den Bogen bf, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 772.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen zu gegebener Breite und Höhe zu konstruiren.

Auflösung.

Es ist ab (Fig. 721.) die gegebene Breite und cd die gegebene Höhe. Man ziehe ad, mache ce = cd, df = ae und halbire af in g. Errichtet man nun in g auf ad ein Loth und verlängert es so weit, bis die Verlängerung der cd dadurch in i getroffen wird, so sind k, k und i die Mittelpunkte der Bogen ah, bh und hdh.

§. 773.

Aufgabe.

Einen gedrückten Bogen dergestalt zu konstruiren, daß die Entfernungen der Mittelpunkte der Bogen vom Mittelpunkte der großen Achse sich wie 3 : 4 verhalten.

Auflösung.

Es ist ab (Fig. 722.) die gegebene Breite und cd die Höhe. Man mache ce = cd, theile ae in zwei gleiche Theile, trage drei derselben von c nach f und vier solcher Theile von c nach g, und lege durch f und g gerade Linien. Beschreibt man aus f mit af und bf die Bogen ah und bh, und aus g mit gh den Bogen hdh, so ist die Aufgabe gelöst.

Beim Verleger dieses sind erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

H. Sternheim, populäre Gnomonik oder Construktion der gebräuchlichsten Arten von Sonnenuhren mit Thierkreislinien und Beleuchtungsscalen. Mit 10 Figurentafeln. 8. 1½ Rthl. od. 2 fl. 42 kr. Gersdorfs Repertorium 1835 7s Heft sagt: „Wir erkennen diese Zusammenstellung der Sätze von Construktionen der Sonnenuhren für etwas Dankenswerthes und Nützliches. Die fein ausgeführten und durchaus rein gehaltenen Zeichnungen verdienen allen Beifall." Das preuß. Bürgerblatt 1836 Nr. 7 empfiehlt dieses Buch als ein für diesen Gegenstand sehr vollständiges, deutliches und belehrendes und sagt: „Wer nur im Stande ist, eine Figur auf eine Steinplatte, Kupfer- oder Messingtafel aufzutragen, wenn er solche auf dem Reißbrete entwerfen kann, der wird in keine Verlegenheit gerathen. Zehn Steindrucktafeln versinnlichen den Text und eine Menge anderer Tafeln sind zur Ersparung weitläuftiger Rechnungen angehängt."

Gegenwärtige Schrift hat vor der verwandten von Littrow für Viele den großen Vorzug voraus, daß sie weder durch analytischen Calcül mathematische Kenntniß voraussetzt, noch roh praktisch ist, wie mehrere andere. Bei möglichst wissenschaftlicher Behandlung erfordert es nichts als den Gebrauch des Bleistifts, Zirkels und Transporteurs, um ohne alle Berechnung und nur durch einfache geometrische Construktionen auf das Kürzeste zu den genauesten und sichersten Resultaten zu führen. Dabei steht nichts ohne Erläuterung, nichts ohne den Beweis da. Alles ist durch die beigefügten Figurentafeln deutlich und anschaulich gemacht.

F. W. Sternickel, Stereometrie oder Körpermessung in ihrer Anwendung auf Baukunst, Forst- u. Landwirthschaft und überhaupt auf viele im Leben vorkommende Geschäftsfälle. Für Forstmänner, Baumeister, Zimmerleute, Maurer, Tischler, Böttcher 2c. Mit 16 Holzschnitten. 4. ½ Rthl. od. 54 kr.
Sehr empfohlen in der Leipz. Litztg. 1827. Nr. 223 und in Becks Repertorium 1827. IV. 1. 2. Die landwirthschaftliche Zeitung pag. 264 nennt diese Schrift sehr praktisch und versichert, daß Keiner, der in diesem Fach arbeite, es bereuen würde, sich solche angeschafft zu haben.

Diese kleine Schrift beabsichtigt, die auf dem Titel genannten Geschäftsleute und Handwerker in den Stand zu setzen, sich ohne gründliches Studium der Stereometrie und ohne Zuziehung eines Mathematikers bei vorfallenden Körpermessungen selbst zu helfen. Deshalb sind auch alle Aufgaben der Industrie angepaßt und alle Lehren zwar ohne verwirrende Weitschweifigkeit, sondern mit Kürze, aber doch höchst deutlich und leicht verständlich vorgetragen und

größtentheils durch die eingedruckten saubern Holzschnitte veranschaulicht. Ganz dasselbe läßt sich sagen von:

Dessen praktischer Altimetrie oder Höhenmessung, nebst der angewandten ebenen Trigonometrie. Für Bau- und Forstverwalter, Feldmesser, Zimmerleute, Maurer, Industrie- und Werkschulen ꝛc. Mit 14 lithographirten Quarttafeln. gr. 8. ⅔ Rthl. od. 1 fl. 12 kr. Becks Repertorium 1831. III. 5 sagt: „Diese Altimetrie behandelt ihren Gegenstand praktischer, weniger gelehrt und weitschweifig, aber viel anwendbarer und verständlicher, als frühere Werke über Höhenmessung." Die Leipz. Litztg. 1832. Nr. 129 sagt hiervon: „Der Vortrag ist im Ganzen faßlich und der Classe von Lesern, welchen das Werk bestimmt ist, verständlich."

Diese Schrift wird den auf dem Titel genannten Ständen durch ihre praktische Deutlichkeit, durch die Anwendbarkeit auf die am häufigsten vorkommenden Fälle und durch die Brauchbarkeit im wirklichen Geschäftskreise, so wie durch ihre durch sehr zahlreiche Abbildungen noch mehr erläuterte Deutlichkeit besonders nützlich seyn.

Dessen Algebra numerosa, oder praktisch-demonstrative Anweisung zur Buchstaben-Arithmetik. Ein Hilfs- und Uebungsmittel für Gymnasien, Stadt-, Militär-, Industrie- und Werkschulen. gr. 8. ½ Rthl. od. 54 kr.

Nach dem unparteiischen Urtheil eines ausgezeichneten Mathematikers hat der Verfasser durch diese Schrift seinen frühern Werken die Krone aufgesetzt: Sie enthält eine historische Einleitung, die Grundlehren stufenweis mit Erläuterungsbeispielen, Uebungsaufgaben in ganzer und gebrochener Größe, Quadrat- und Kubikwurzelrechnung, die Lehre über algebraische Gleichungen (einfach, aber gemeinfaßlich und zweckmäßig). Alle Probleme sind als eine gewählte, lehrreiche Unterhaltung zu betrachten und werden den Lehrern und Lernenden Vergnügen machen. Durch die Menge berechneter Aufgaben wird dieses Hilfsbuch des Lehrers Cursus erleichtern und durch solches dem Schüler eine Erheiterung verschafft, die sich bei dem Abstrakten dieser Wissenschaft nöthig macht, wenn der Geist nicht ermüdet und abgeschreckt werden soll.

M. Wölfer (Bauinspector), gemeinnütziges mathematisch-technisches Taschenbuch. Enthaltend: eine gründliche Anweisung zur Arithmetik, Geometrie und Mechanik, zum Mühlen- und Wehrbau u. zur Mühlen-Architektur, zum Nivelliren mit einer neu erfundenen und zweckmäßigen Wasserwaage und Geschwind-Messung u. Berechnung der Wasser-Quantität in den Mühlengräben, zum Ufer- und Damm-

bau, zur Regulirung der Flüsse und Mühlengräben und zur Entwässerung und Urbarmachung sumpfiger und vom Wasser zerrissener Wiesen, Torf=, Rieth= und Vieh=Triften. Zum Selbstunterricht für Juristen, Cameralisten, Forstmänner, Oekonomen, Gärtner, Müller, Mühlen=Geschirrbauer und andere Maschinisten, für Künstler, Bauhandwerker und Pionire; so wie auch zum Gebrauche für Militär=, Kunst= und Bauhandwerks=Schulen. 38 Bogen. Mit 10 lithographirten Tafeln. 8. 2 Rthl. od. 3 fl. 36 kr.

Diese reichhaltige und verhältnißmäßig so wohlfeile Schrift bildet eine kleine praktische Encyclopädie der mathematisch=technischen Wissenschaften und ist den auf dem Titel genannten Ständen unentbehrlich. Es sind zwar bisher viele Schriften ähnlicher Tendenz erschienen, wobei jedoch immer theoretische Vorkenntnisse und praktische Handgriffe vorausgesetzt werden, die man vom gewöhnlichen Bauhandwerker, Gesellen und Lehrling nicht verlangen kann. Am unverständlichsten darin ist ihnen die unerklärte arithmetische Formelsprache. Der Verfasser, welcher seit einer Reihe von Jahren die Werkstätten der Künstler und Handwerker selbst durchwandert und seinen Händen und Augen die technischen Arbeiten in der Ausführung selbst angeeignet hat, hat sich daher bemüht, durch Deutlichkeit, Beispiele, Abbildungen und Einfachheit von den Anfangsgründen an bis zur Ausführung allgemein praktisch verständlich zu seyn. Seine Schrift vereinigt eigentlich fünf verschiedene Abtheilungen. Davon beschäftigt sich die I. Abtheilung mit der Arithmetik und zwar vom Zählen an bis dahin, wo sie in den mathematisch=technischen Künsten angewendet wird. II. Abtheilung Geometrie und Stereometrie. III. Abtheilung die Mechanik und die Anwendung der einfachen Maschinen, als Hebel, Rad, Globen, schiefe Fläche, Schraube, Keil ꝛc., als die Potenzen aller zusammengesetzten Maschinen. IV. Abtheilung der Wasser=, Mühlen= und Wehrbau, so wie auch die Mühlen=Architektur, besonders für Müller populär und nutzbar, nebst sehr wesentlichen Winken bei Mühlenprozessen, für Justizbehörden. V. Abtheilung der Ufer= und Dammbau, wie auch Regulirung der Flüsse und Entwässerung und Urbarmachung sumpfiger und vom Wasser zerrissener Wiesen, Torfriethe und Viehtriften.

J. Bachmann, die Theorie und Praxis des Nivellirens, mit besonderer Rücksicht auf Libellen=Instrumente. Mit 6 lithographirten Foliotafeln (wovon 2 colorirt). gr. 8. 1½ Rthl. od. 2 fl. 15 kr.

Das wenige über diesen Gegenstand bis jetzt Erschienene ist nur für die beschränktesten ökonomischen Zwecke bestimmt und enthält nur das Verfahren mit der unvollkommenen Kanalwaage. Bei Ermittelung von Flußgefällen, bei Anlage von Wasserbauwerken, Kanälen, Landbahnen von schwacher Steigung, Verglei=

Bayerische
Staatsbibliothek
München

chung der Höhenlage entfernt liegender Fachbäume und in andern wichtigen Fällen kann der Gebrauch dieses Instruments der erforderlichen Genauigkeit nicht entsprechen. Der Verfasser, von der Erklärung der Begriffe und der Theorie der Fehler wegen der Erdkrümmung und der terrestrischen Refraction ausgehend, gibt in obigem Werke die Beschreibung sowohl der unvollkommnern Nivellir=, als auch der vollkommnern Libellen=Instrumente, mit Rücksicht auf ihre Rectification, ihren Gebrauch und ihre Genauigkeitsgrenze, und liefert die Beschreibung einer Nivellir=Latte zum sichern, bisher noch zu wenig benutzten Ablesen der Zahlen durchs Fernrohr. Hierauf folgt die praktische Ausführung ausgedehnterer Nivellements für Chausseebau, Entwässerungsprojecte und Fluß=Nivellements ꝛc. unter Beifügung der Zeichnungen der Nivellements=Profile und der Nivellements= und Strom=Geschwindigkeits=Tabellen. In dieser Vollständigkeit enthält das Werk alles auf nivellistische Arbeiten Bezügliche, und wird nicht allein denen, welche nur für Privat= und ökonomische Zwecke nivelliren, sondern auch ganz besonders denjenigen, welche im Auftrag der Behörden sich mit größern Nivellements beschäftigen, willkommen seyn.

Dr. Th. Thon's Lehrbuch der Reißkunst oder der wahren Grundsätze der Zeichnenwissenschaft. Eine theoretisch=praktische Anweisung nach sichern Regeln das Zeichnen, sowohl mit Lineal und Zirkel, als auch aus freier Hand nach Musterzeichnungen, besonders aber nach der Natur, schnell und vollkommen auch ohne Lehrer zu erlernen. Ein unentbehrlicher Leitfaden für alle, welche im Erlernen des Zeichnens bald Fortschritte machen wollen, namentlich für Architekten, Bildhauer, Maler, mechanische Künstler, vorzüglich aber für Handwerker. Frei nach dem Französischen bearbeitet. 17 Bogen und Atlas in 36 Median=Quartblättern. 1½ Rthl. od. 2 fl. 42 kr.

Nicht ein gewöhnliches Zeichnenbuch, sondern der Kern der goldenen Lehren, durch welche die vortrefflichsten aller Maler, ein Raphael, Michel Angelo ꝛc. zu so großen Meistern wurden. Wer die leicht faßlichen Grundsätze, welche dieses Werk aufs Deutlichste darlegt, inne hat, dem muß der Zeichnengriffel gehorchen, wie dem erfahrenen Steuermann das Schiff, die hellste Sonne zeigt die Bahn, die zu verfolgen, und die Uebung der Hand, sonst beim Zeichnen das Schwierigste — erscheint hier fast als Nebensache. Was aber besonders bemerkt werden muß, ist, daß das Werk dem Handwerker eben so willkommen und belehrend als dem eigentlichen Zeichnenkünstler seyn wird.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Fig. 2 S 2.

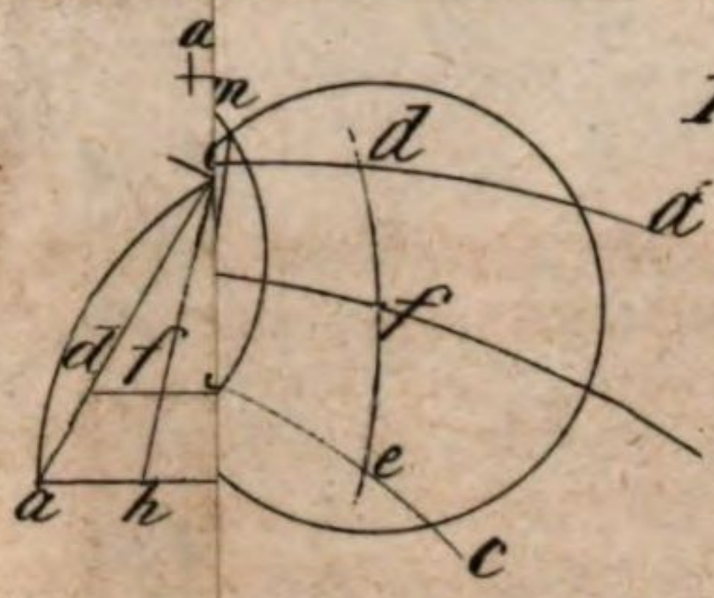
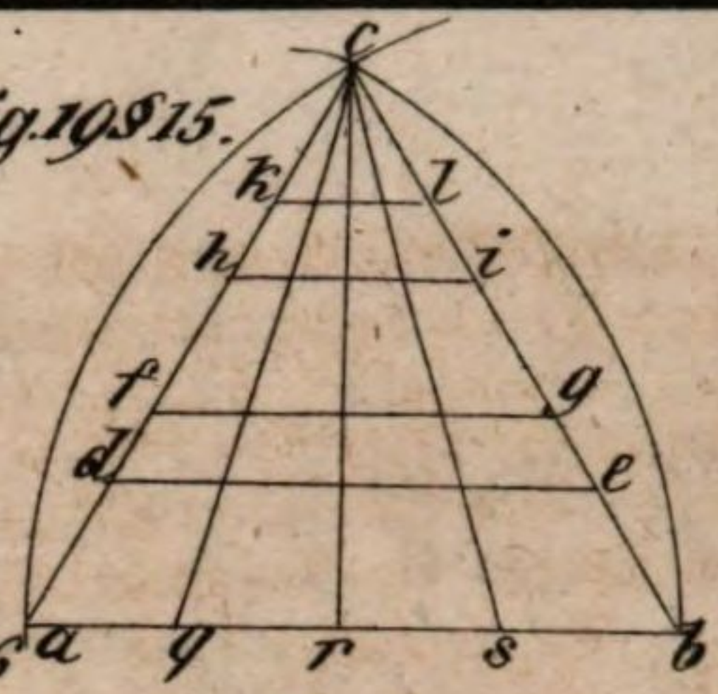


Fig. 10 S 15.



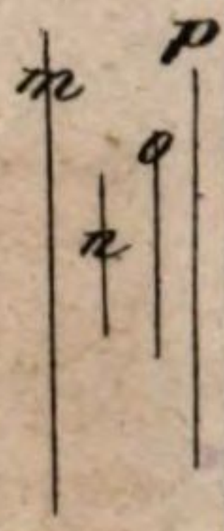
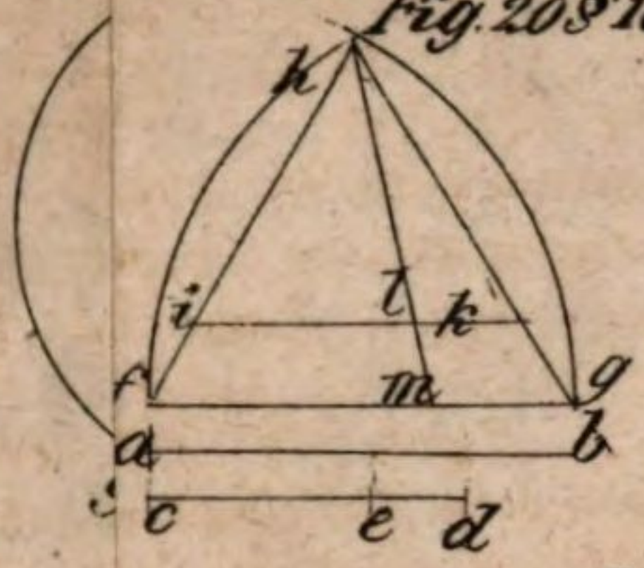


Fig. 20 S 16



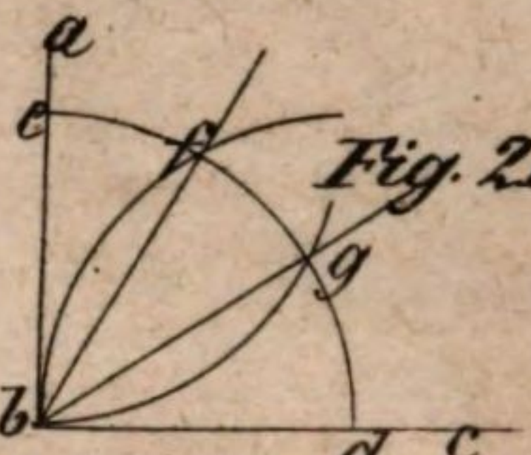


Fig. 21 S 17.

Fig. 17 S 13

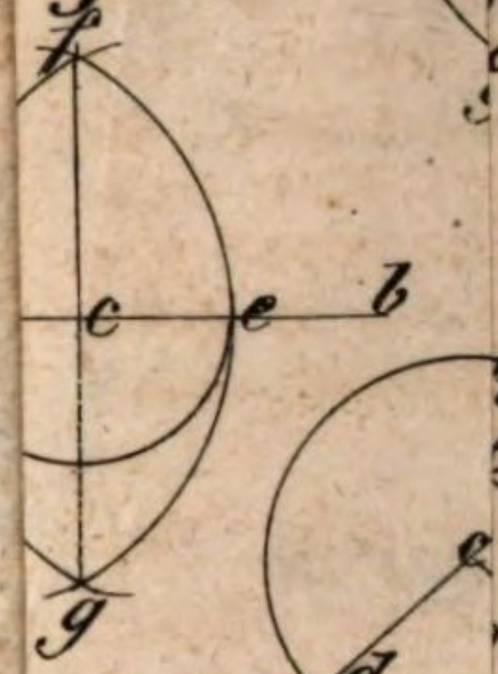


Fig. 22 S 18

Fig. 23 S 19.

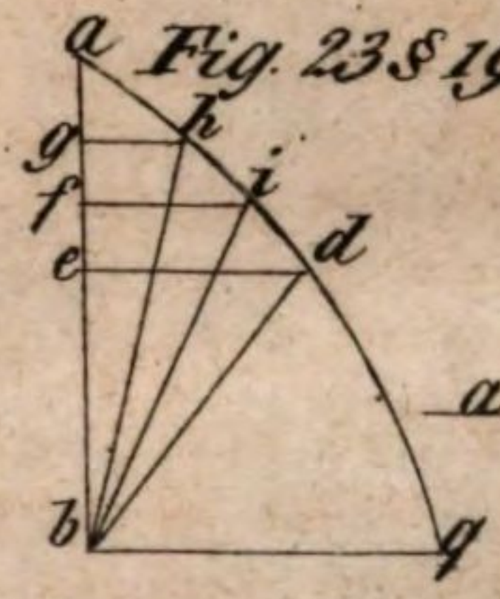


Fig. 25 S 13.

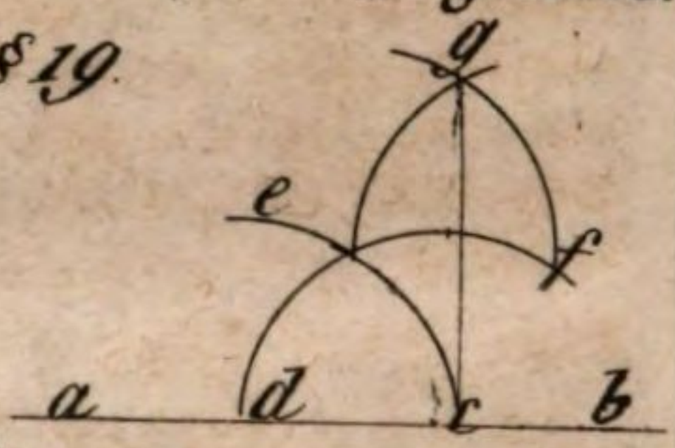


Fig. 28 S 21

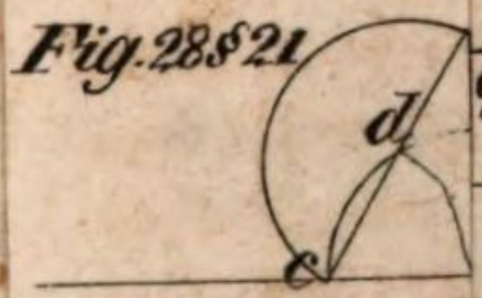


Fig. 26 S 26.

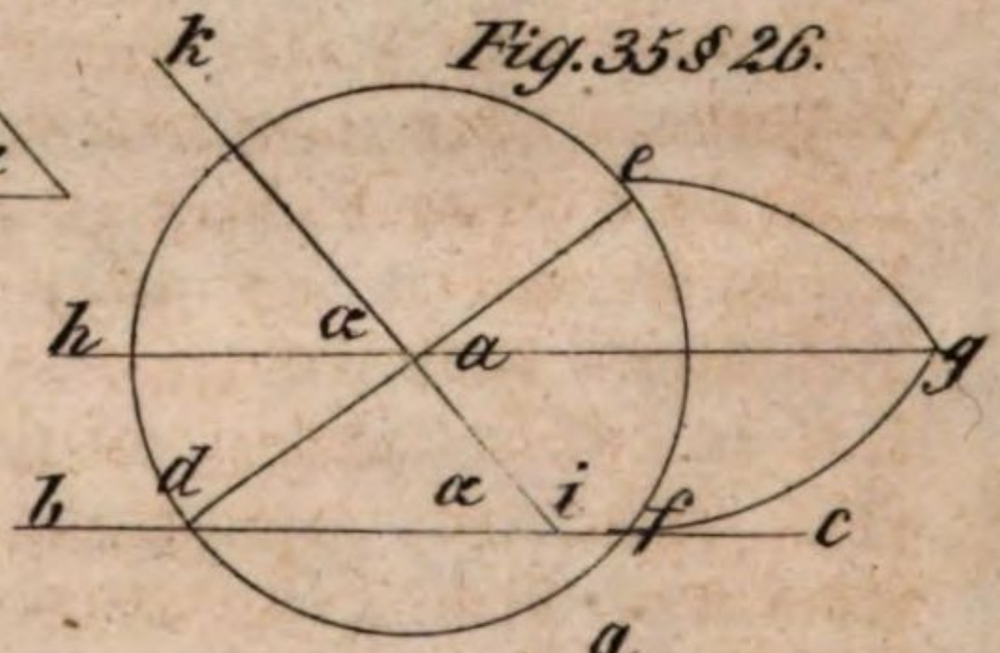


Fig. 32 S 24

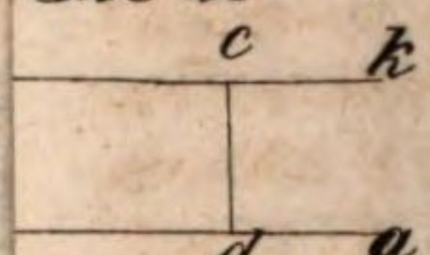


Fig. 41 S 33.

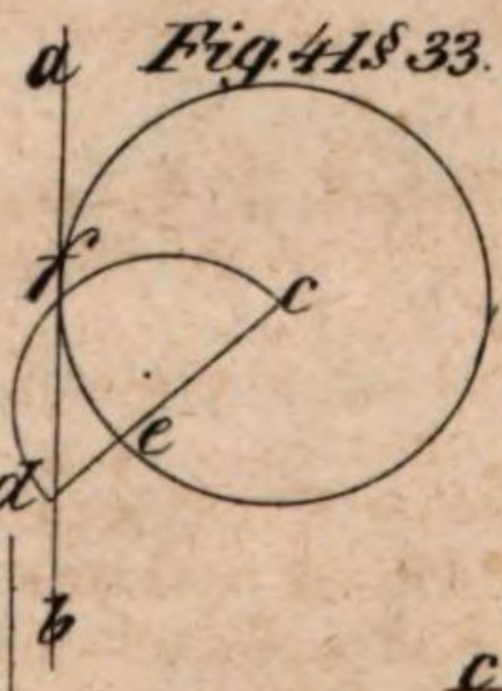


Fig. 42 S 33.

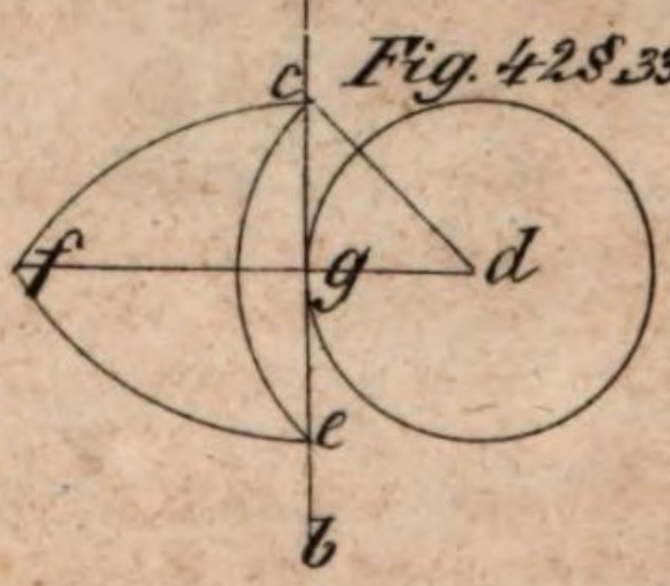


Fig. 44 S 35

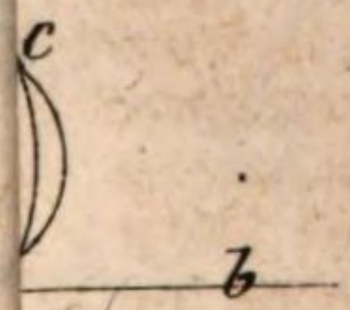


Fig. 47 S 37.

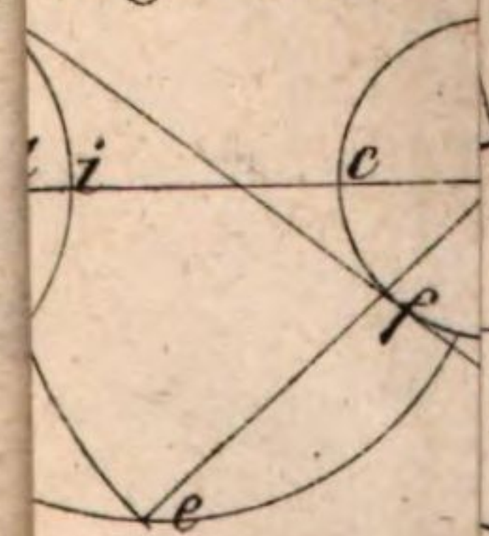


Fig. 52 S 42

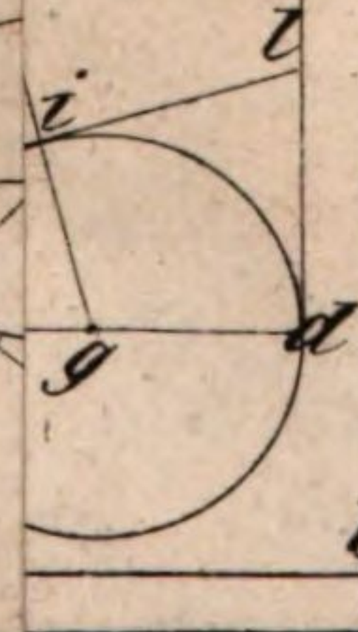


Fig. 53 S 43.

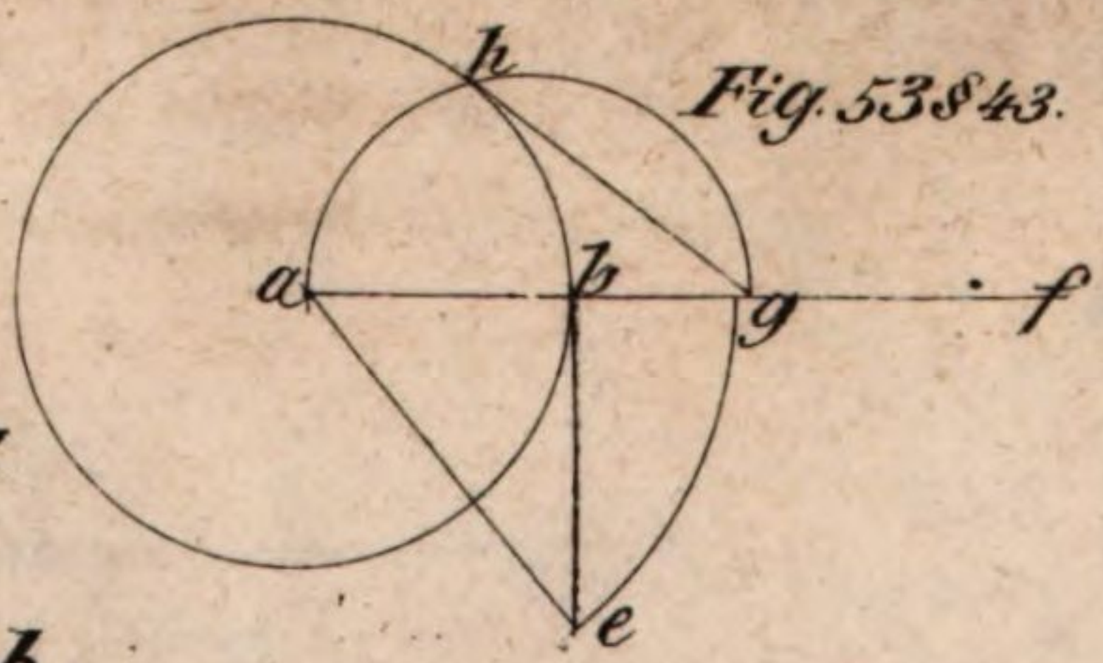


Fig. 61 § 53.

Fig. 62 § 54.

Fig. 65 § 49.

Fig. 80 § 74.

Fig. 81 § 74.

Fig. 82 § 75.

Fig. 59 § 51.

Fig. 73 § 66.

Fig. 86 § 80.

Fig. 97 § 93.

Fig. 94 § 90.

Fig. 98 § 93.

Fig. 115 § 112.

Fig. 116 § 112.

Fig. 114 § 111.

Fig. 108 § 104.

Fig. 118 § 115.

Fig. 119 § 116.

Fig. 133 § 123.

Fig. 134 § 124.

Fig. 135 § 124.

Fig. 136 § 124.

Fig. 142 § 131.

Fig. 128 § 129.

Fig. 129b § 12

Fig. 149 § 140

Fig. 152 § 143.

Fig. 153 § 145.

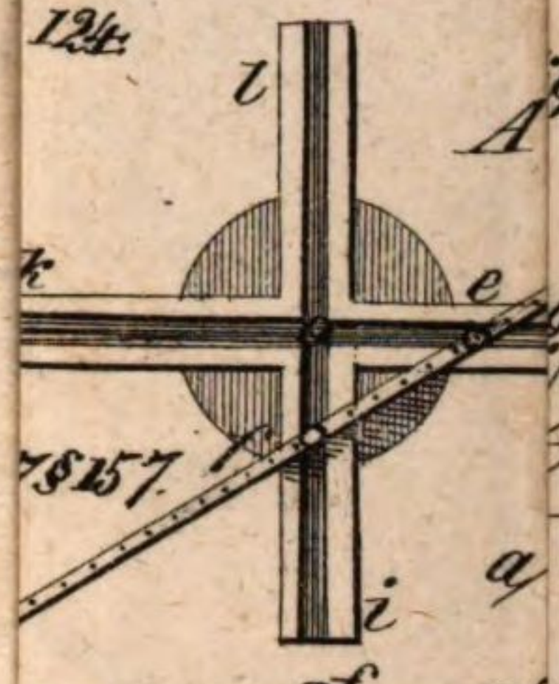
Fig. 154 § 144.

Fig. 160 § 150.

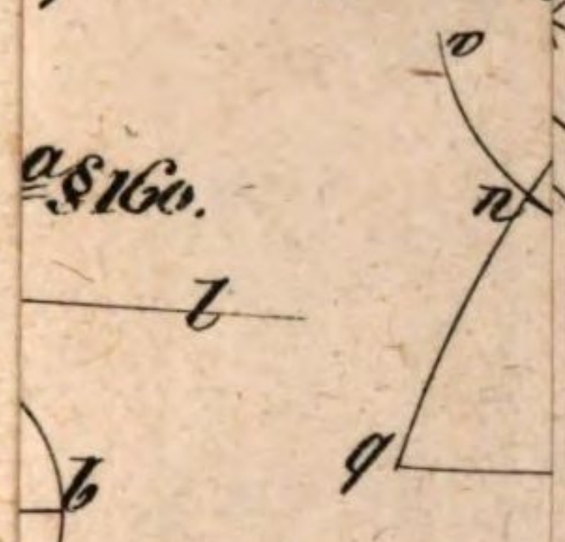
Fig. 162 § 152.

Fig. 161 § 151.

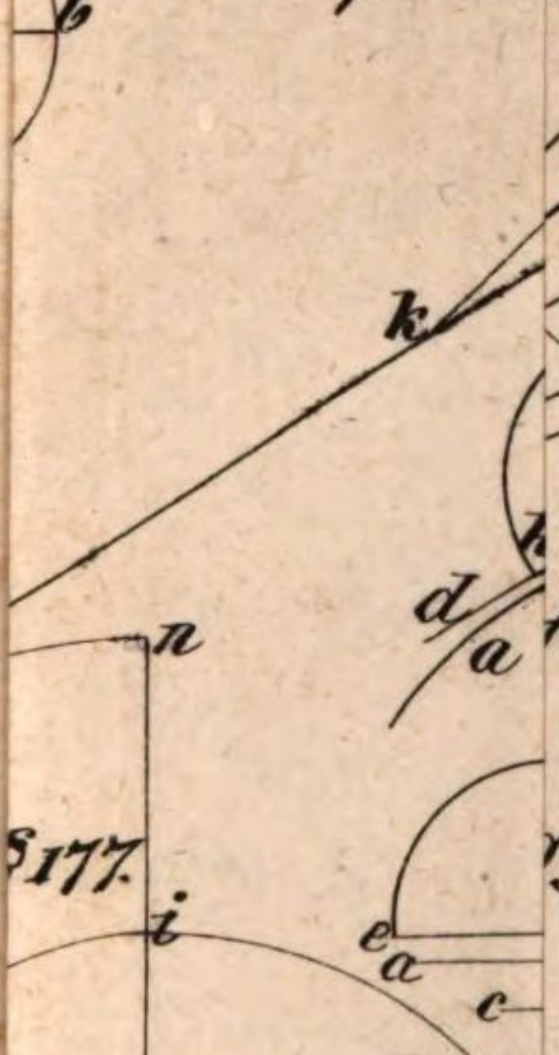
124.



7&157.



a&160.



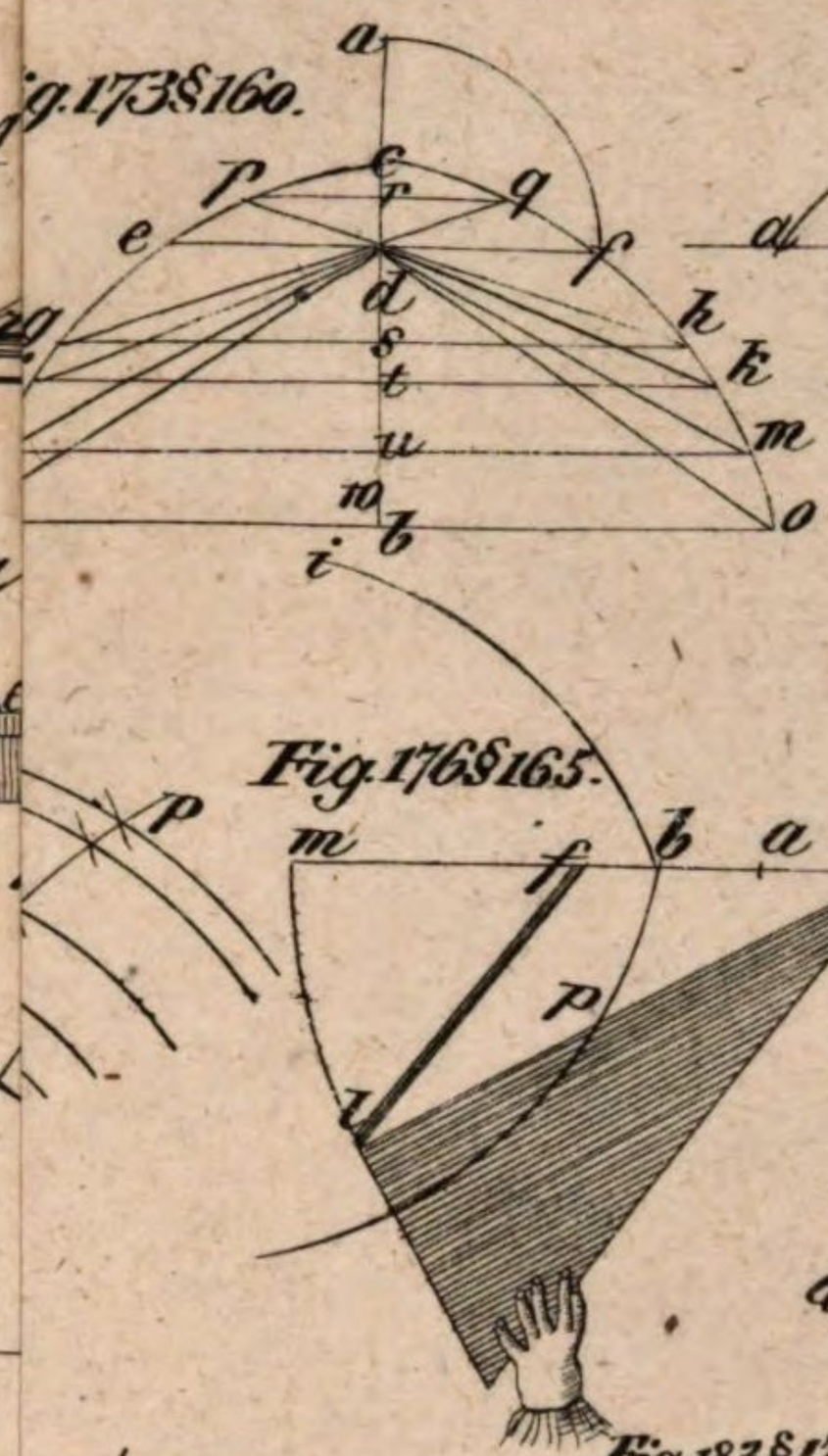


Fig. 173&160.

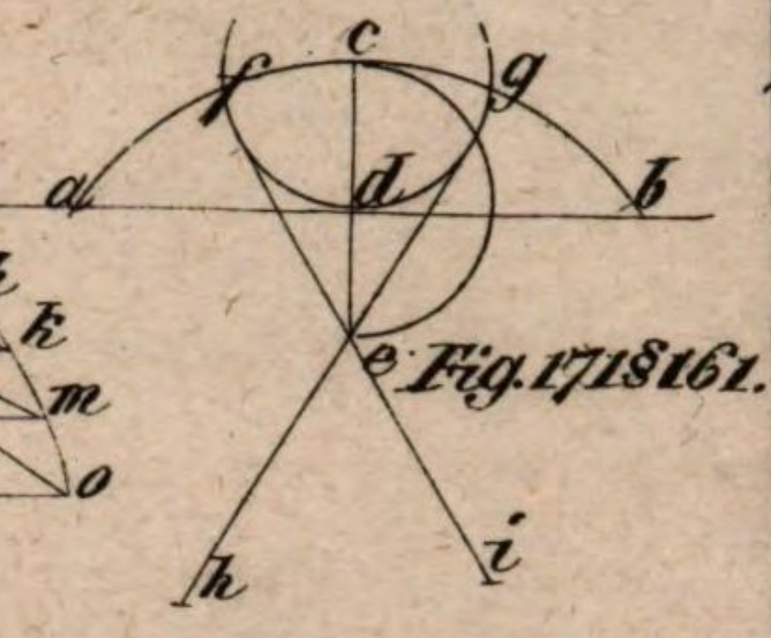


Fig. 171&161.

Fig. 176&165.

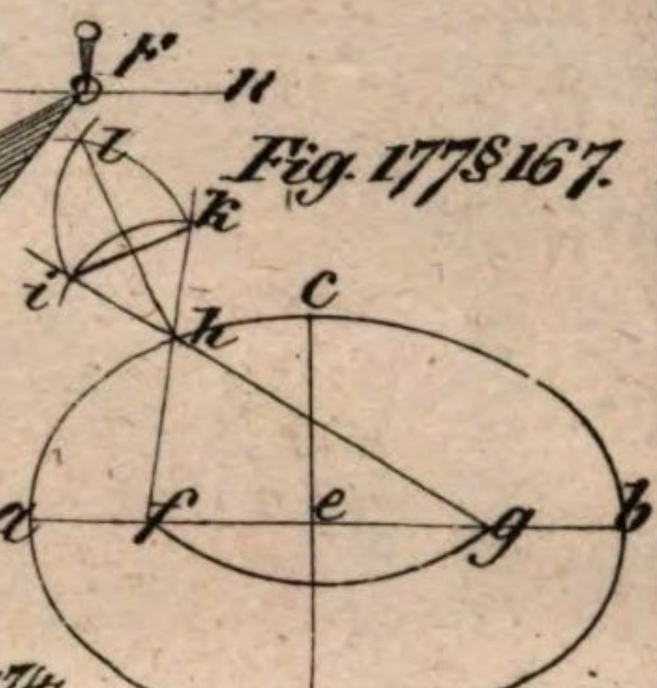
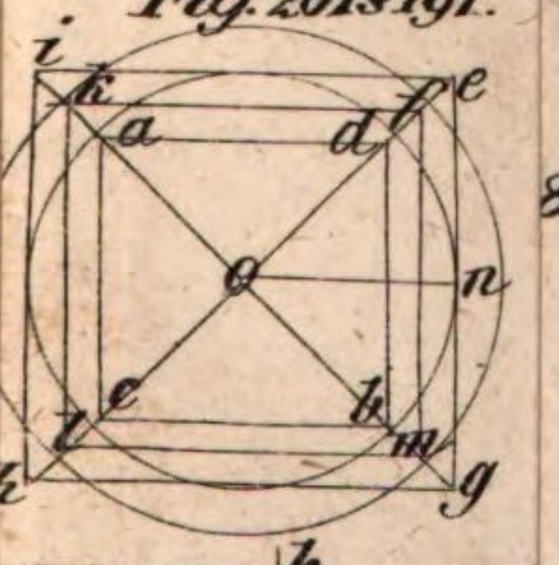


Fig. 177&167.

Fig. 197

Fig. 201&191.



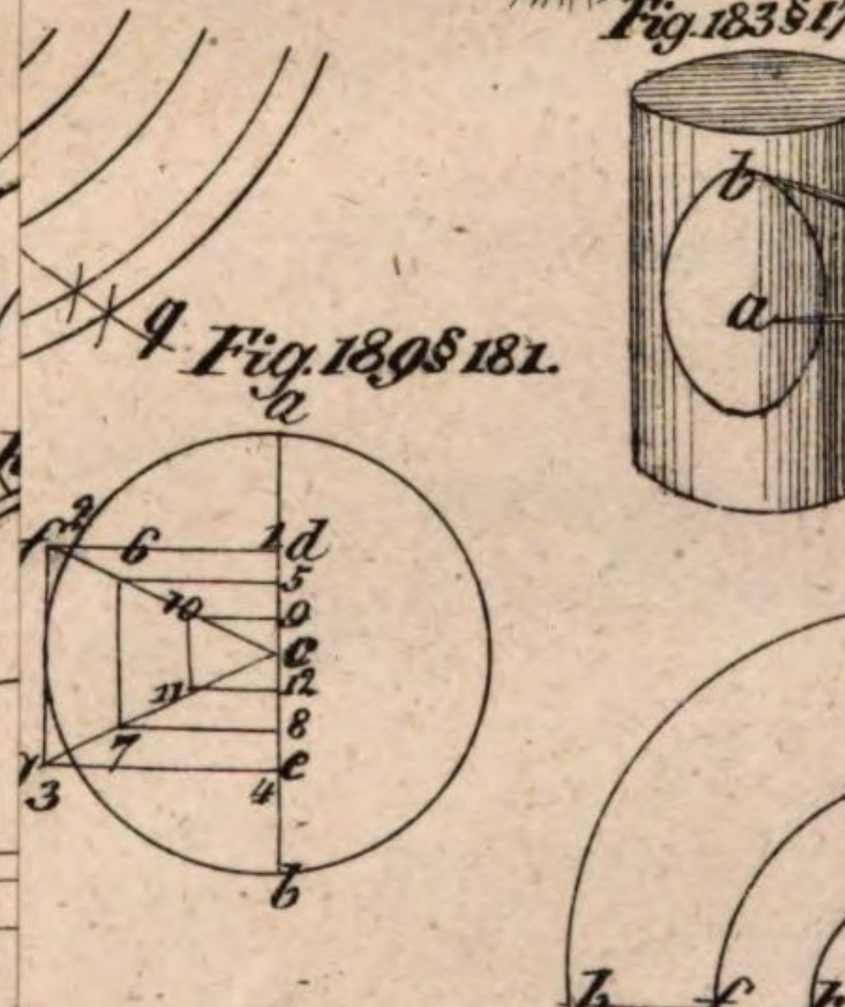


Fig. 189&181.

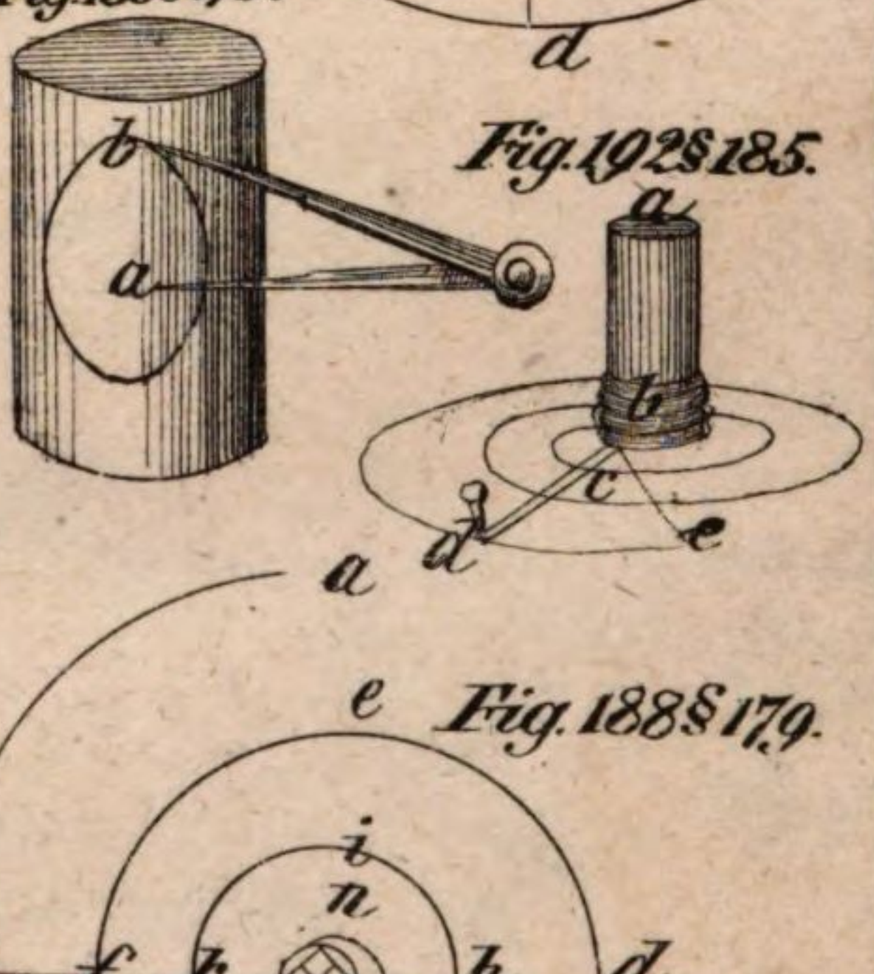


Fig. 192&185.

Fig. 195&189.

Fig. 210&189.

Fig. 206&197.

88 199.

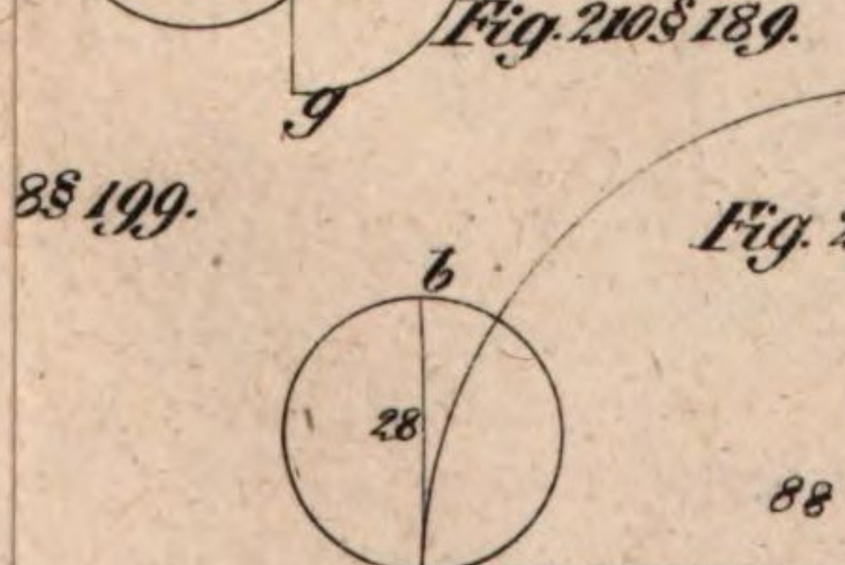


Fig. 203&191.

Fig. 224. §215.

Fig. 225. §216.

Fig. 226. §217.

Fig. 228. §219.

Fig. 230. §221.

Fig. 234. §225.

Fig. 229. §220.

Fig. 227. §218.

Fig. 248. §239.

Fig. 249. §240.

Fig. 254. §245.

Fig. 250. §241.

Fig. 258. §250.

Fig. 277. §269.

Fig. 282. §272.

Fig. 279. §271.

Fig. 280. §272.

Fig. 281. §273.

4.

Fig. 286

Fig. 30

Fig. 289.
§ 281.

8. § 320, u.
§ 321.

Fig. 332. § 337.

Fig. 308. § 304.

Fig. 312. § 310.

Fig. 313. § 310.

Fig. 324. § 328.

Fig. 325.
§ 329.

Fig. 326.
§ 330.

3.

Fig. 338. § 348.

Fig. 345. § 349.

46. § 350.

Fig. 307. § 303.

Fig. 311.
§ 291.

Fig. 337. § 342.

Fig. 310. § 306.

Fig. 323. § 327.

Fig. 339.
§ 343.

Fig. 347.
§ 351.

Fig. 343. § 347.

Fig. 347 & 351

Fig. 355 & 362.

Fig. 355 & 362.

Fig. 359 &

Fig. 362 & 369.

Fig. 370 & 377.

& 371.

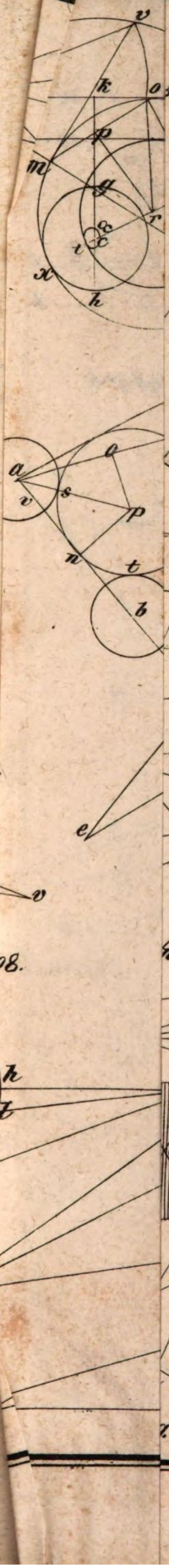
& 373 & 380.

Fig. 376 & 383.

& 388

Fig. 388 & 395.

& 401.



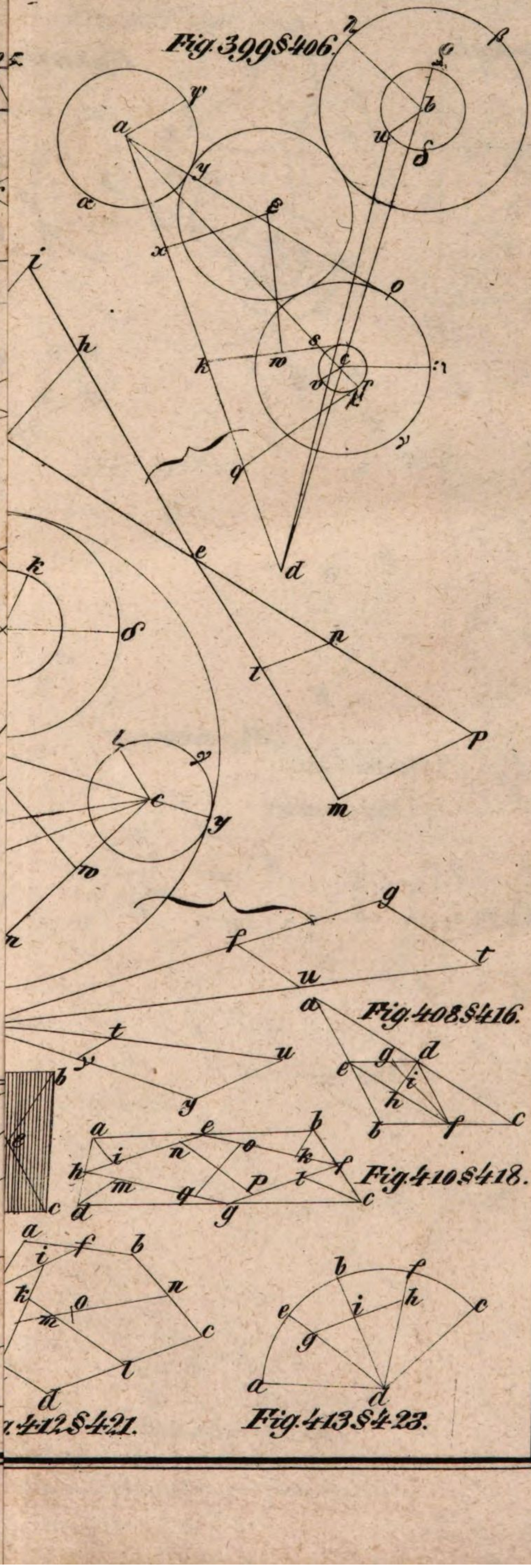


Fig. 3998406.

Fig. 4088416.

Fig. 4108418.

Fig. 4128421.

Fig. 4138423.

Fig. 417. § 429.

Fig. 422. § 432.

Fig. 423. § 434.

Fig. 425. § 438.

Fig. 431. § 445.

Fig. 432. § 446.

Fig. 466. § 483.

Fig. 433. § 447.

Fig. 434. § 449.

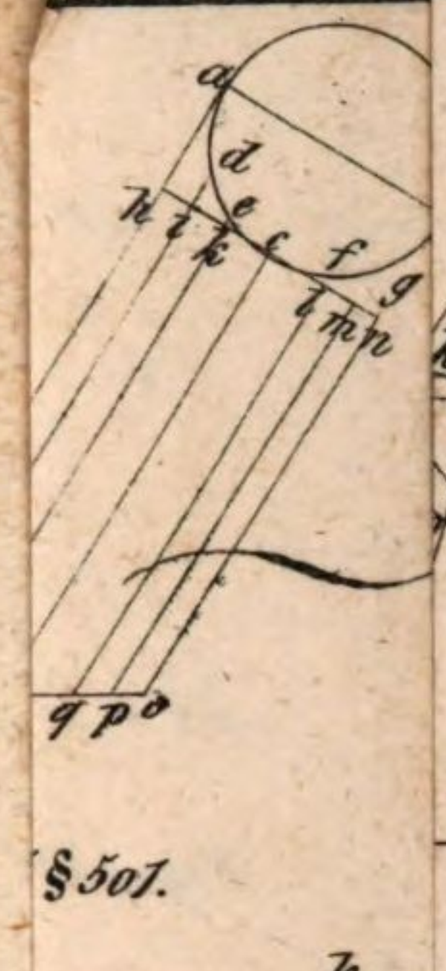
Fig. 469. § 486.

Fig. 470. § 486.

Fig. 471. § 487.

Fig. 472. § 488.

Fig. 474. § 490.



§ 501.

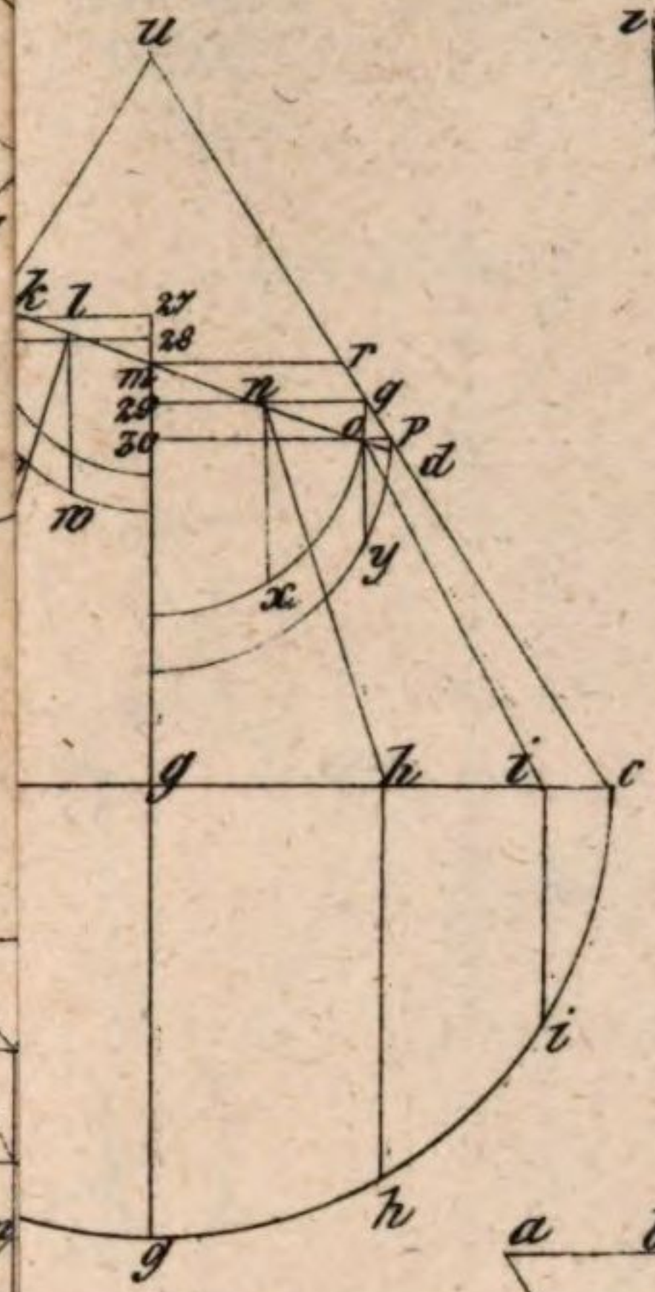


Fig. 480. § 496.

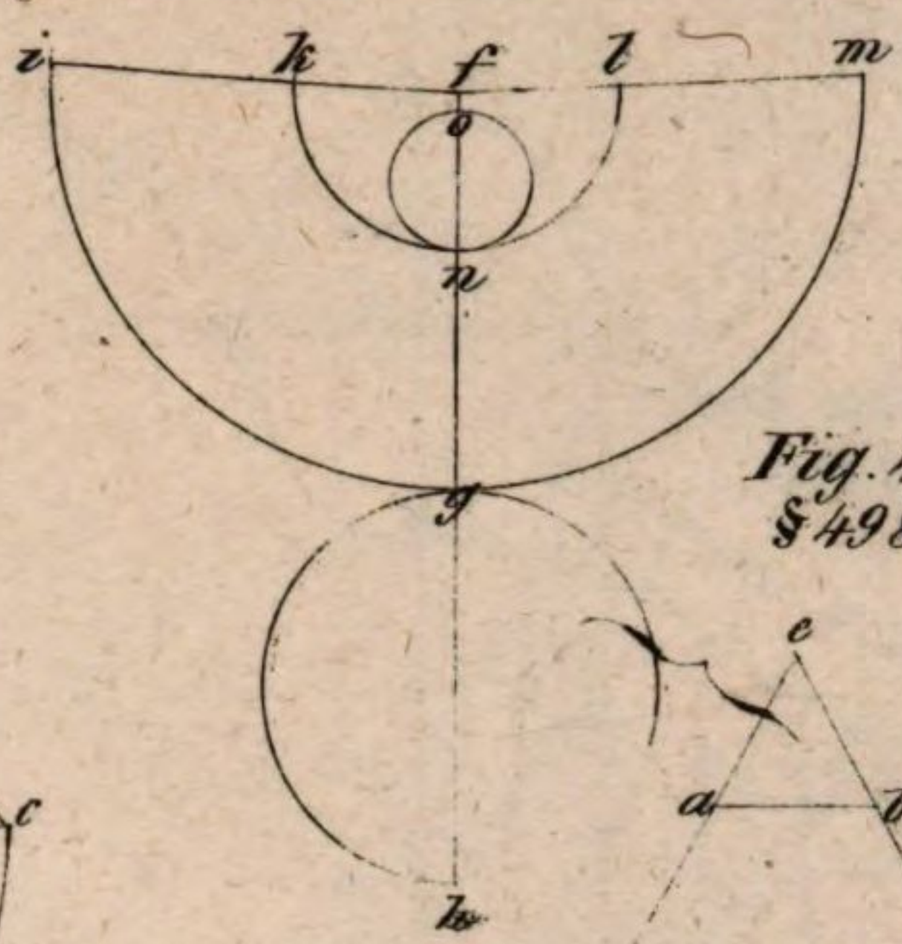


Fig. 482. § 498.

Fig. 483. § 499.

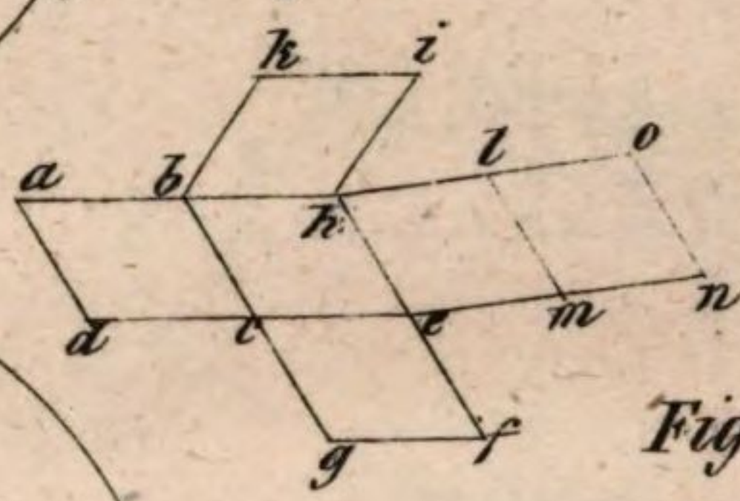


Fig. 484. § 499.

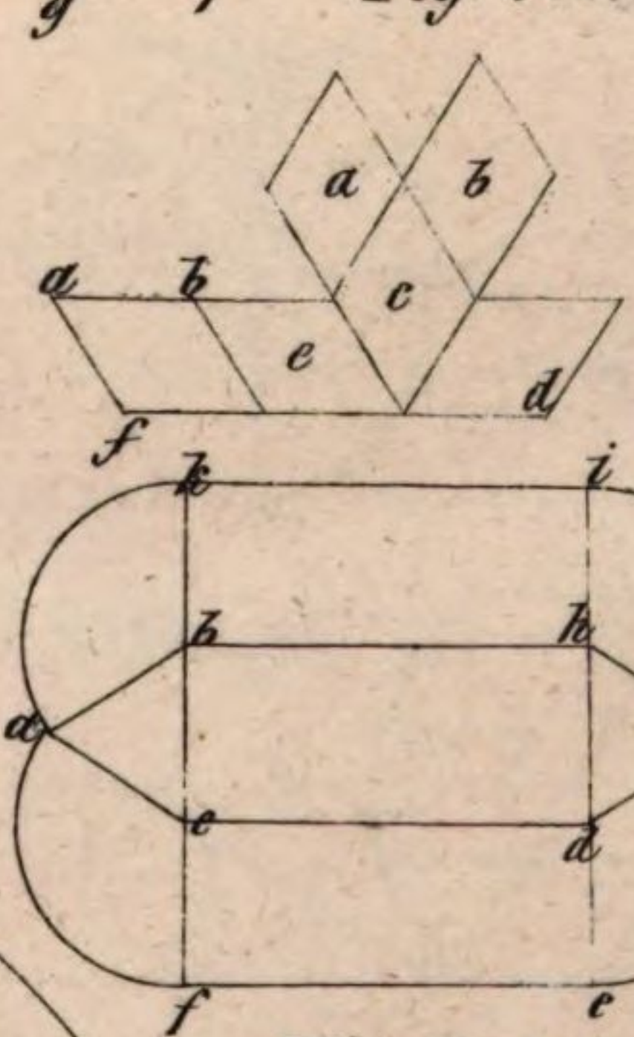


Fig. 485. § 500.

Fig. 490. §

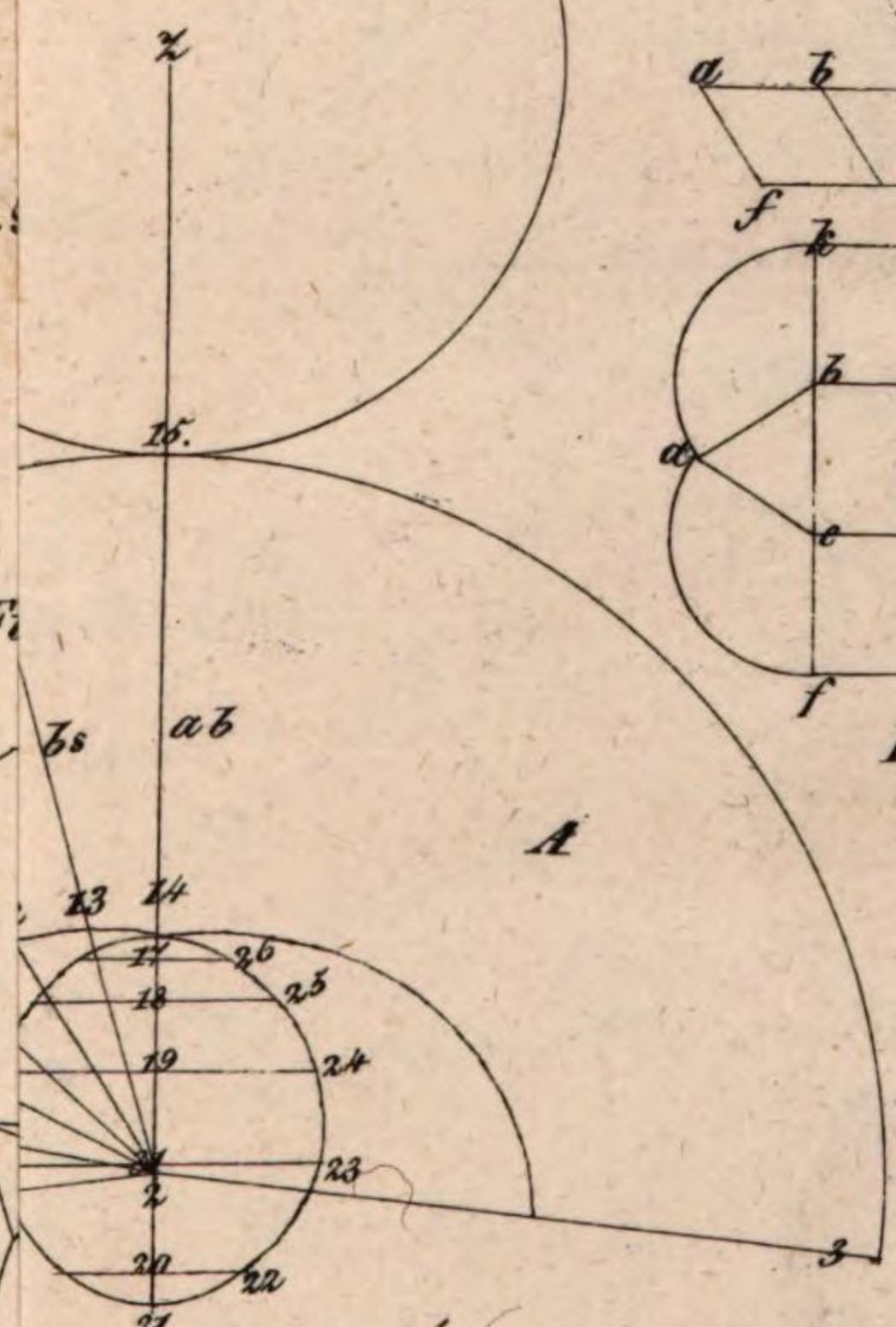
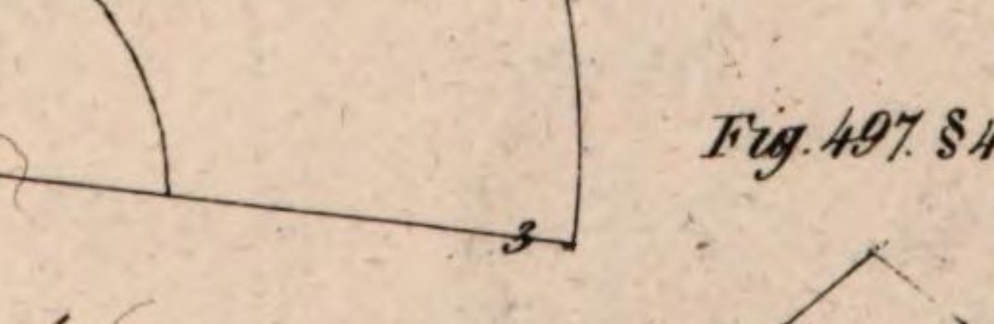


Fig. 497. § 499.



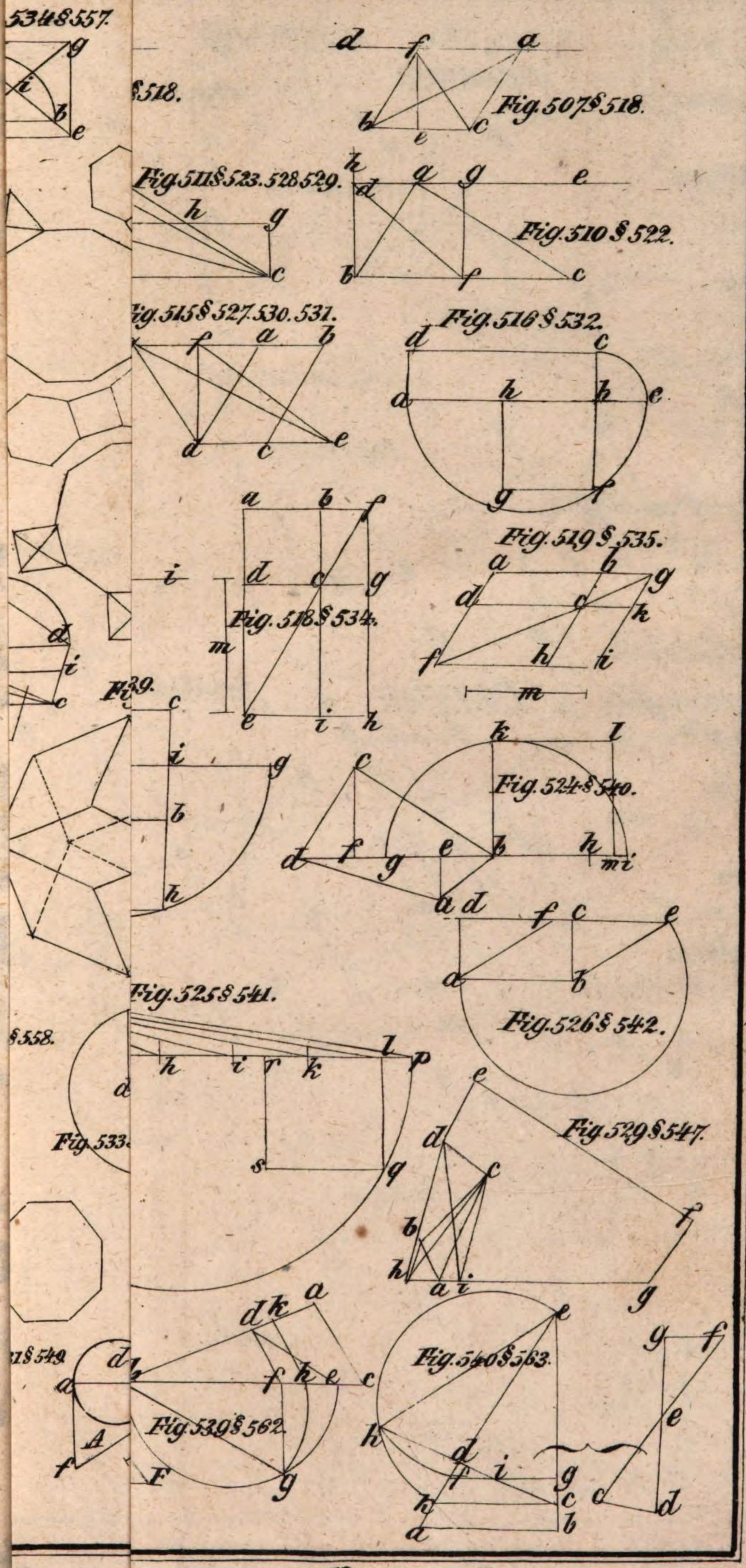

534 & 557.
§ 518.
Fig. 507 § 518.
Fig. 511 § 523. 528 529.
Fig. 510 § 522.
Fig. 515 § 527. 530. 531.
Fig. 516 § 532.
Fig. 518 § 534.
Fig. 519 § 535.
Fig. 524 § 540.
Fig. 525 § 541.
Fig. 526 § 542.
§ 558.
Fig. 529 § 547.
Fig. 539 § 562.
Fig. 540 § 563.

Fig. 550 & 578.

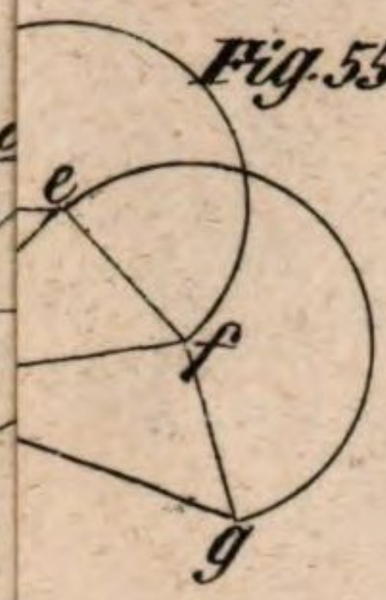


Fig. 552 & 580.

Fig. 542 & 569

Fig. 547 & 575.

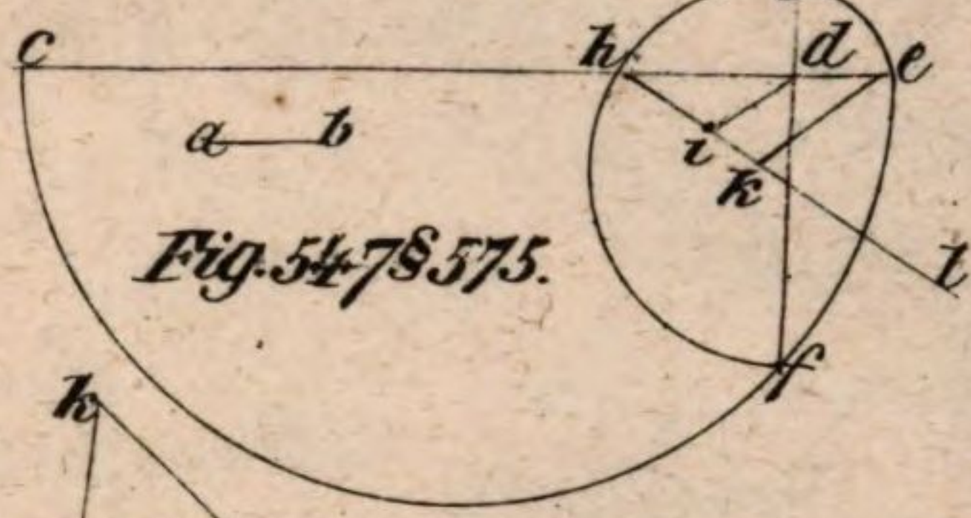
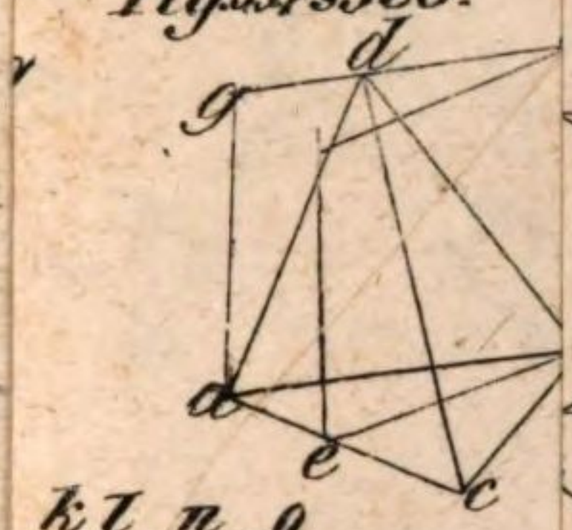
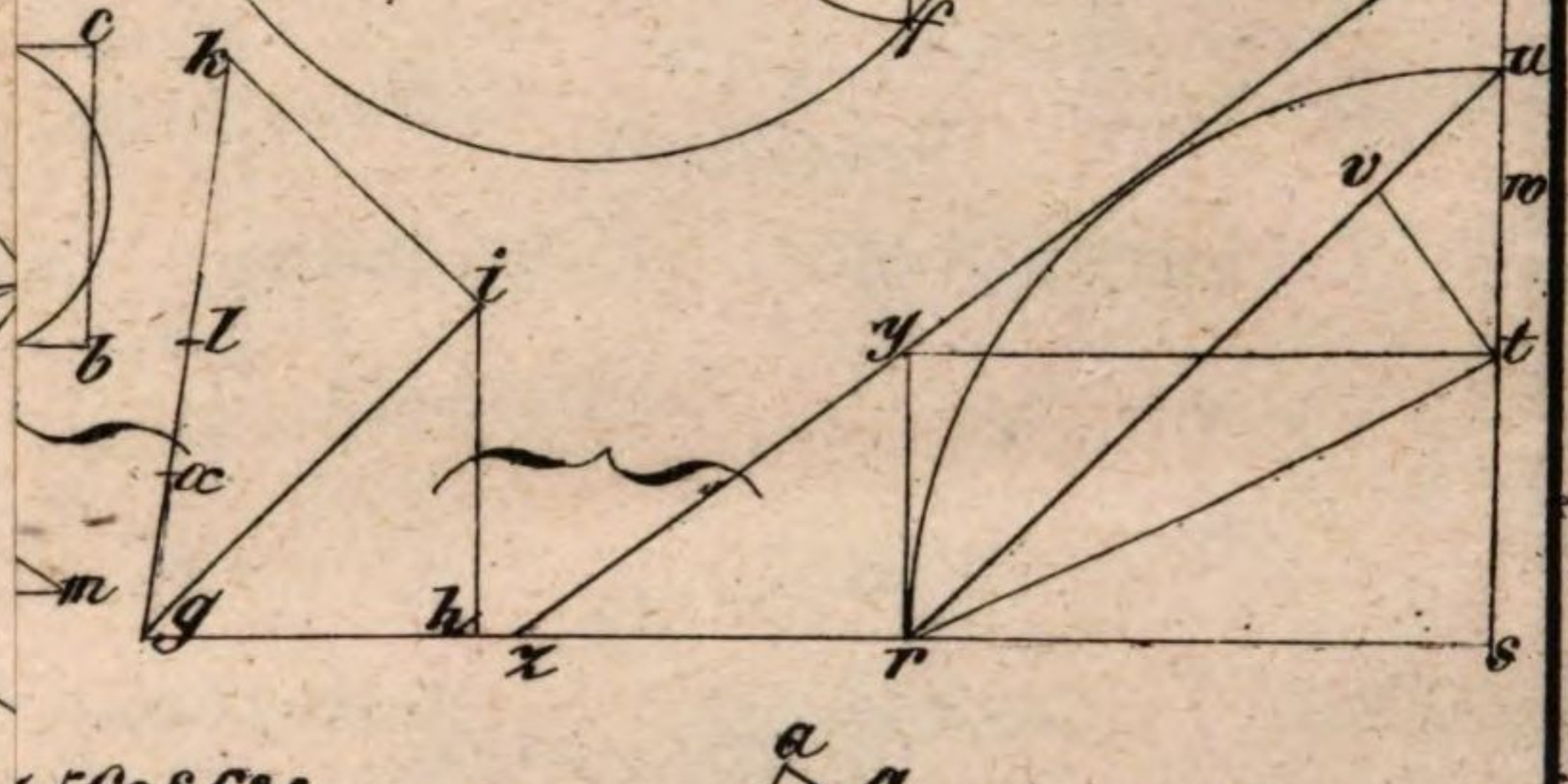


Fig. 557 & 586.





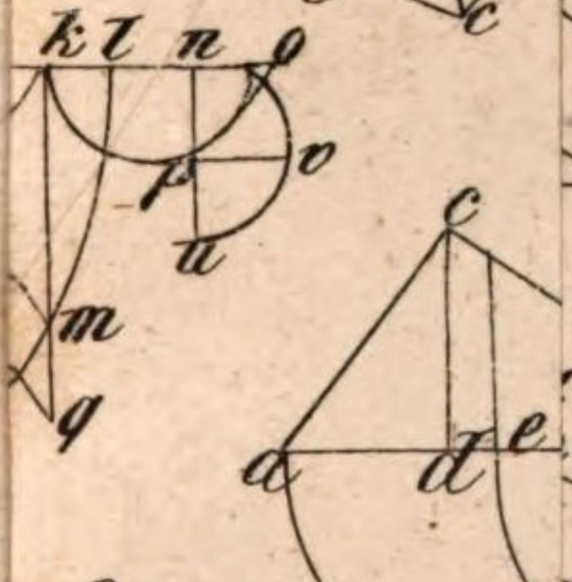


Fig. 569 & 625.

Fig. 571 & 627

Fig. 572 & 628.

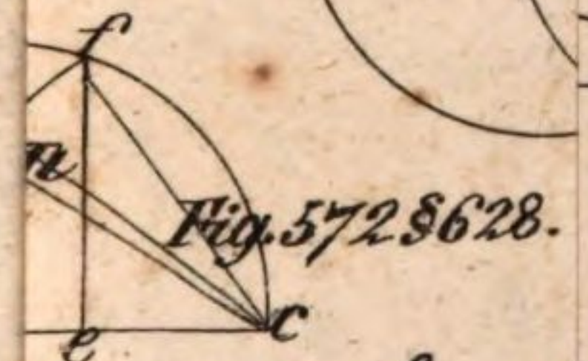


Fig. 583 & 636.

Fig. 578 & 634.

Fig. 584 & 638.

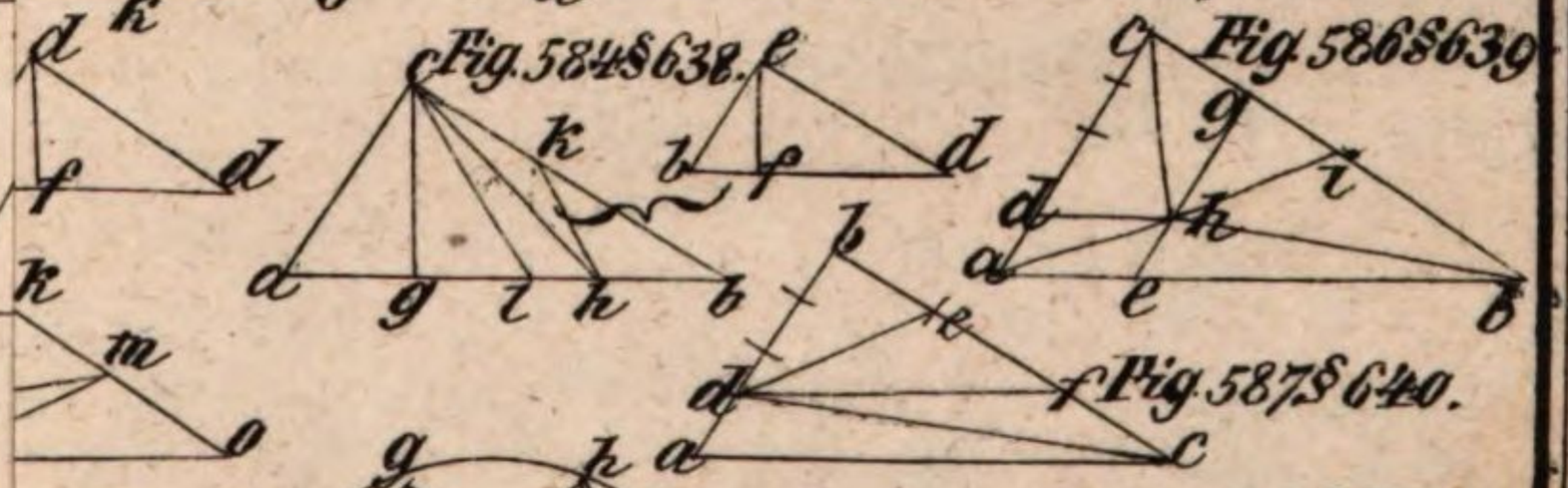


Fig. 586 & 639

Fig. 587 & 640.

Fig. 600 & 652.

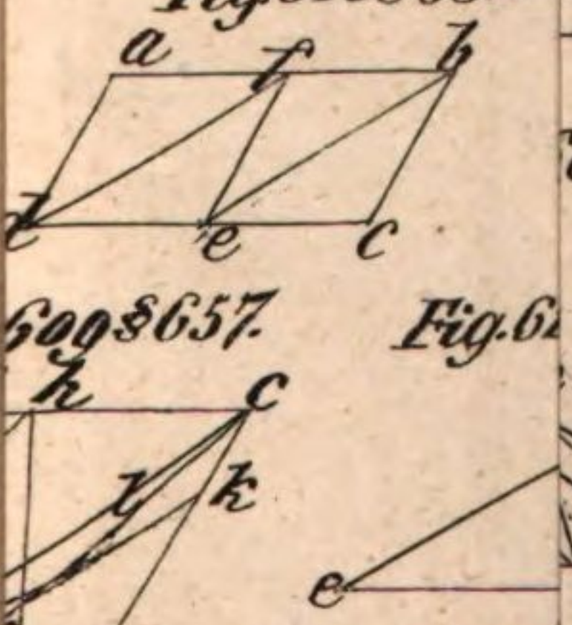


Fig. 607 & 655.

Fig. 608 & 656.

Fig. 605 & 653.

Fig. 609 & 657.

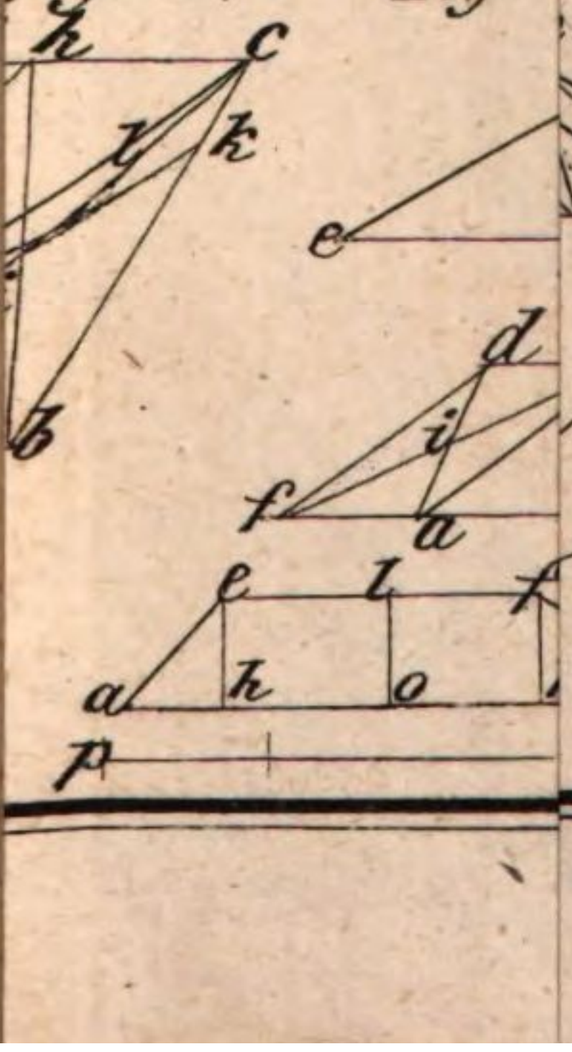


Fig. 619 & 667.

Fig. 626 § 674.
Fig. 641 § 687.
Fig. 631 § 679.
Fig. 655 § 703.
Fig. 644 § 690.
Fig. 654 § 702.
Fig. 663 § 711.
Fig. 635 § 683.
Fig. 642 § 688.
Fig. 637 § 683.

Fig. 673 § 723.

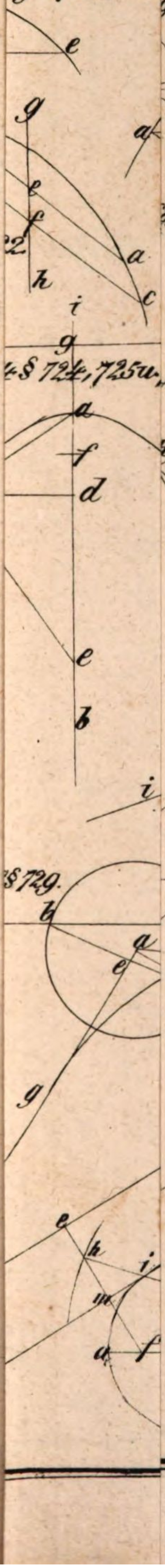


Fig. 694 § 764.

Fig. 687 § 737.

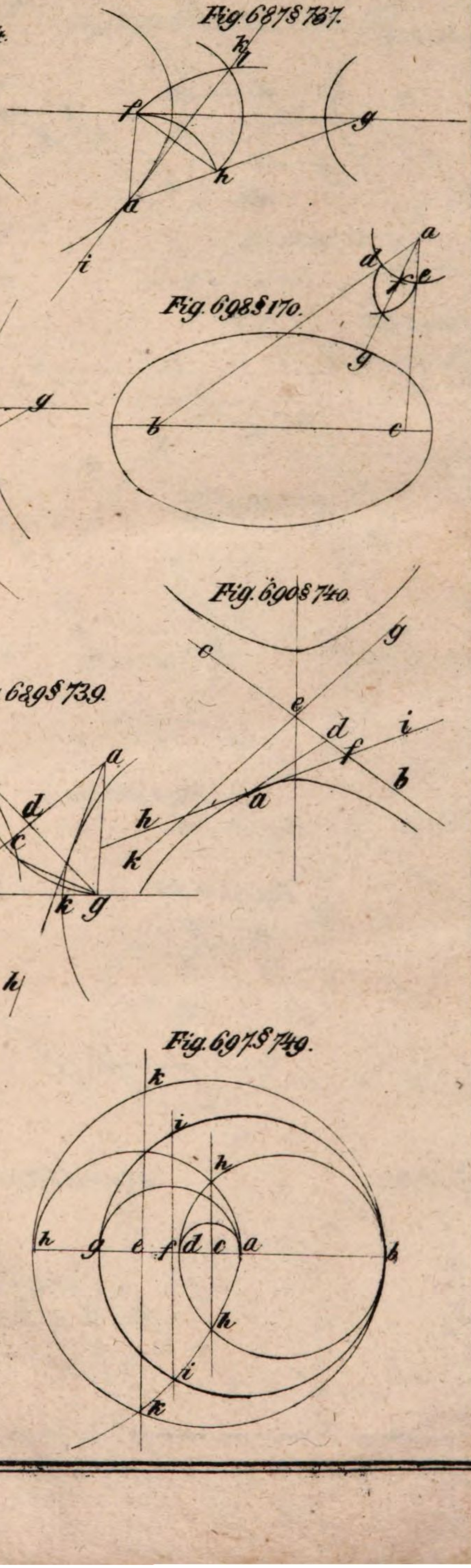


Fig. 698 § 170.

Fig. 690 § 740.

Fig. 689 § 739.

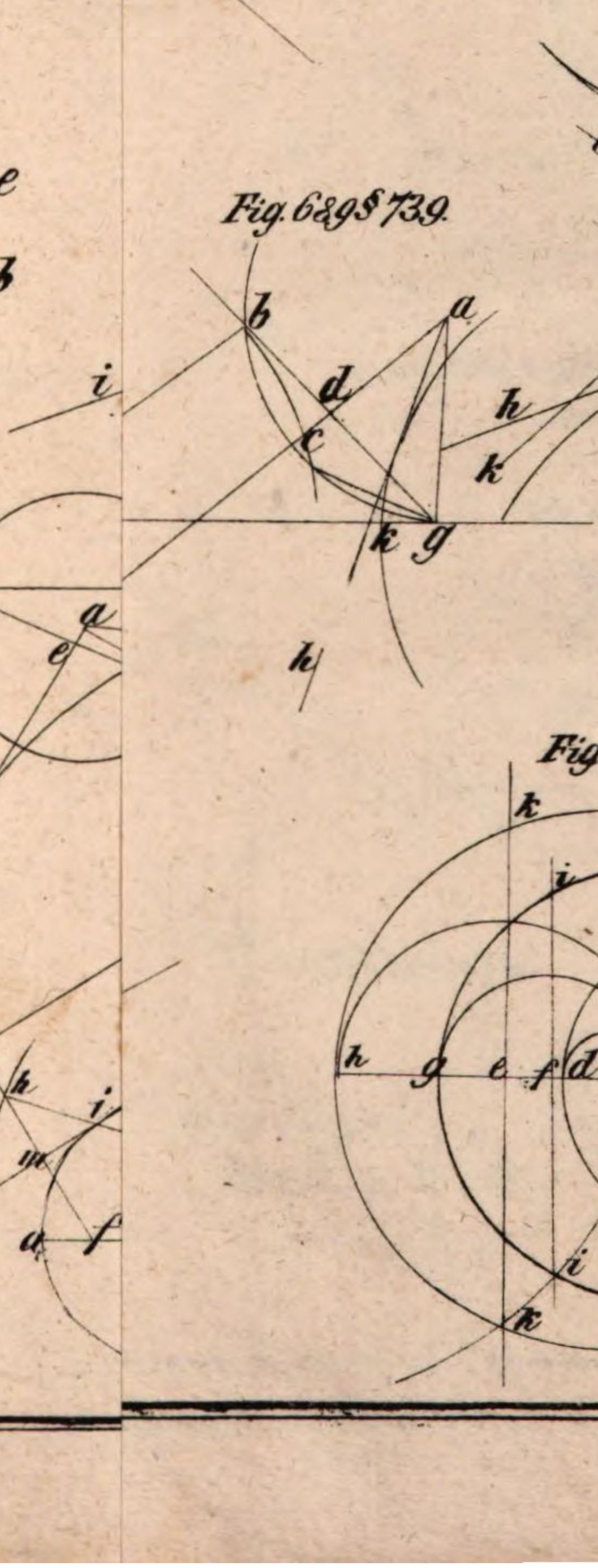
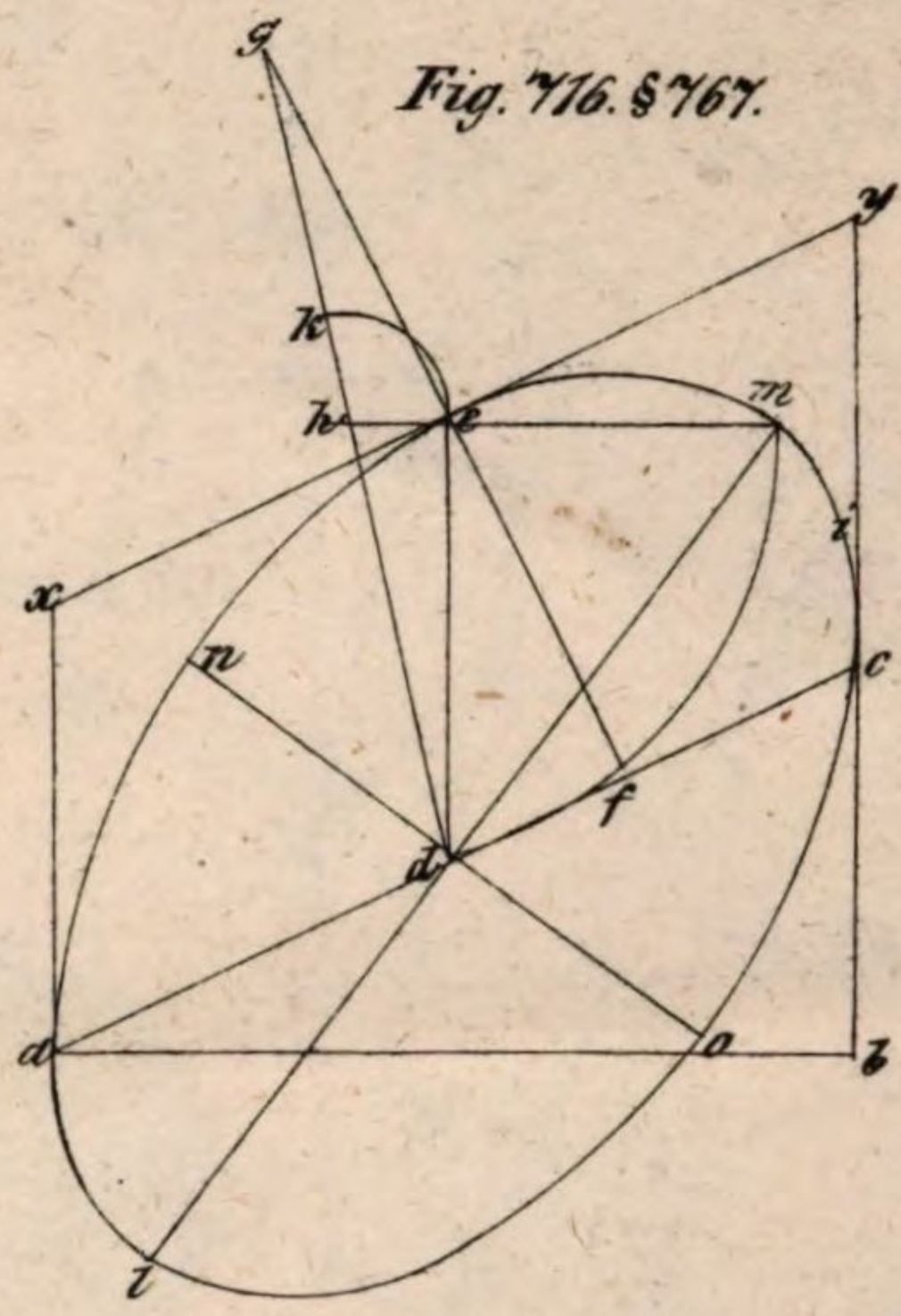


Fig. 697 § 749.

Fig. 709.

Fig. 716. § 767.



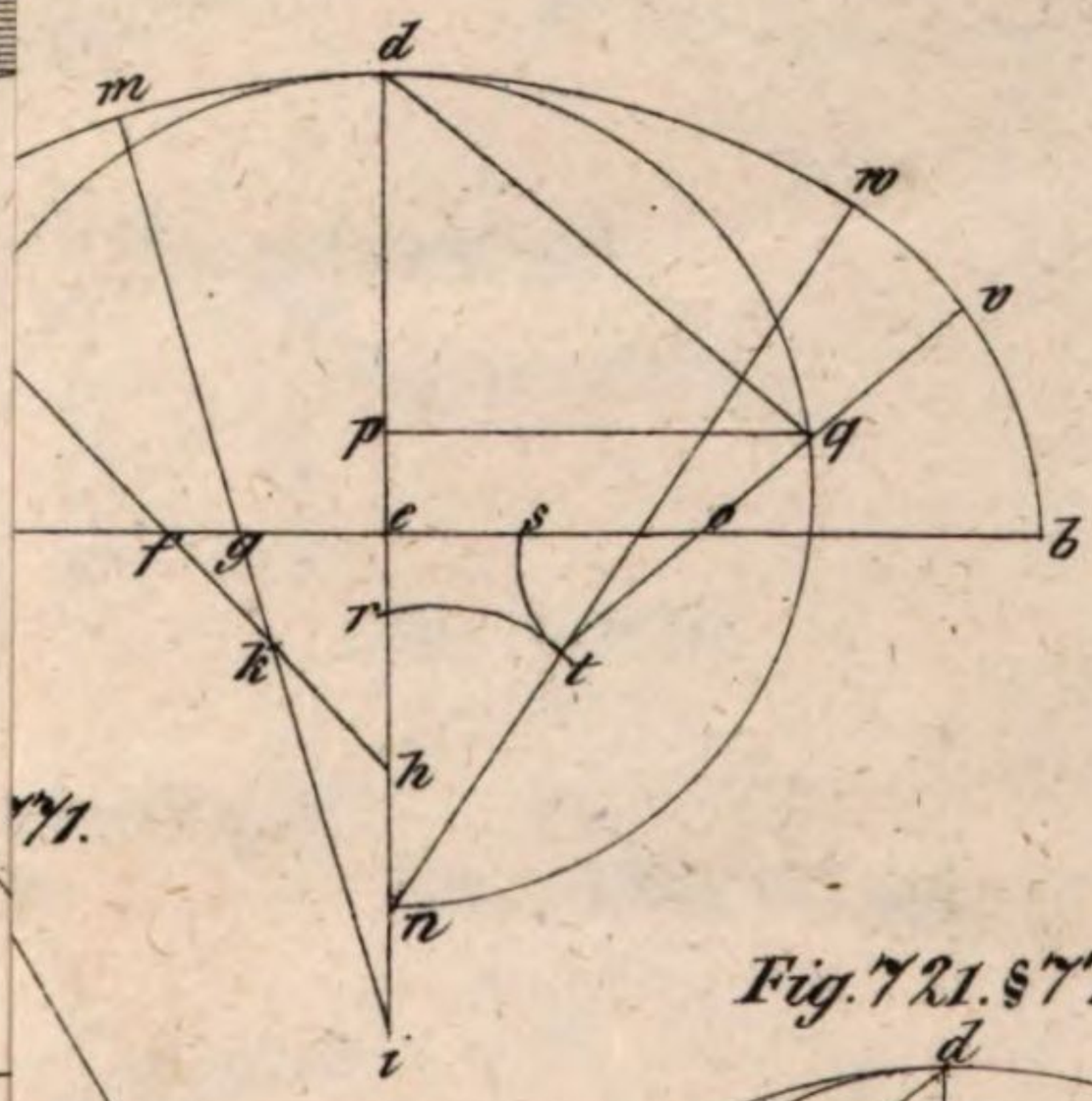


Fig. 721. § 772.

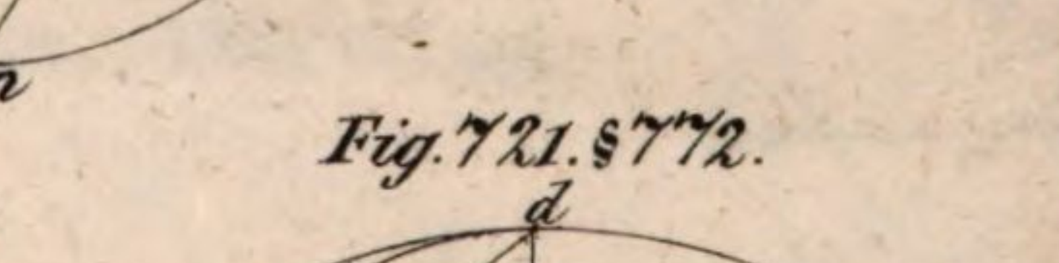


Fig. 722. § 773.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Universitäts
Bibliothek
Münster

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hampel, Johann Carl Gottlieb,

Geometrische Konstructionen, oder Anweisung, gerade Linien und Winkel zu theilen ein Handbuch ... ; Mit 15 Steintafeln, worauf über 700 Figuren

Weimar 1844

BHS II K 3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708082-5